This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.

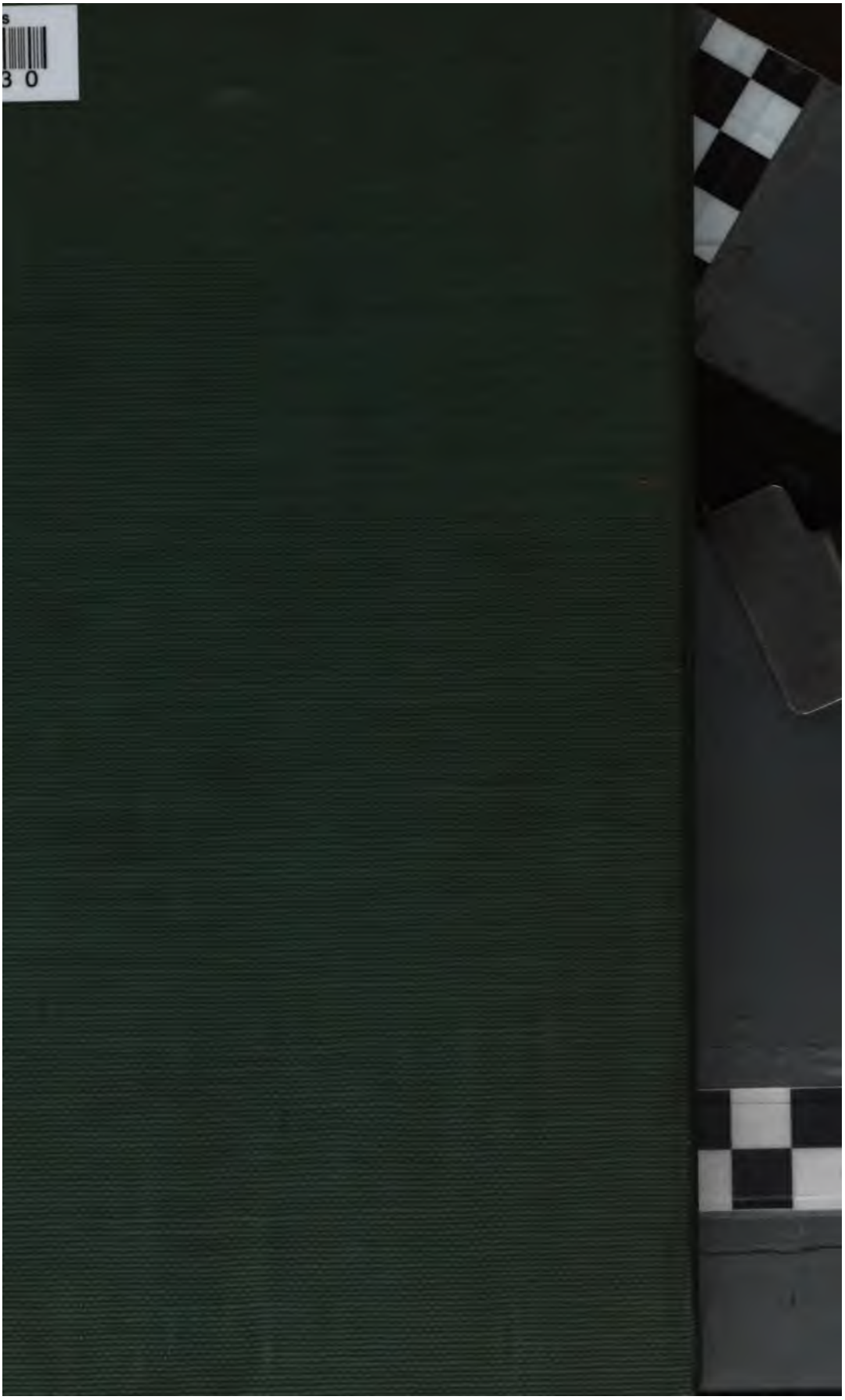
+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.

+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.

+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.



PGG
FERRARI

GALILEO FERRARIS

WISSENSCHAFTLICHE GRUNDLAGEN DER ELEKTROTECHNIK

NACH DEN

VORLESUNGEN ÜBER ELEKTROTECHNIK

GEHALTEN IN DEM R. MUSEO INDUSTRIALE IN TURIN

DEUTSCH HERAUSGEGEBEN

VON

DR. LEO FINZI

MIT 161 FIGUREN IM TEXT

LEIPZIG
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER
1901

THE NEW YORK
PUBLIC LIBRARY
228035
ASTOR, LENOX AND
TILDEN FOUNDATIONS.
R 1901 L.

ÜBERSETZUNGSRECHTS, VORBEHALTEN.

Vorwort.

Im Februar des Jahres 1897 kam nach Deutschland die Trauerkunde, dass Professor Galileo Ferraris seiner segensreichen Thätigkeit durch den Tod entrissen war. Die Nachricht machte den tiefsten Eindruck in der ganzen elektrotechnischen Welt und ganz besonders auch bei uns in Deutschland.

Ferraris war erst 50 Jahre alt, als seiner bedeutenden Wirksamkeit ein Ziel gesetzt wurde. Er hat als Physiker an der technischen Hochschule und an der Universität in Turin studiert und später mit einigen Jahren Unterbrechung, während deren er an die Turiner Universität berufen war, seine Hauptlehrthätigkeit an dem „Reale Museo Industriale Italiano" zu Turin entfaltet, indem er die bis dahin hauptsächlich auf die wissenschaftliche Physik angewandten Gesetze der Elektrizitätslehre in ihrer Anwendung auf die technische Physik weiter bildete und nutzbar machte. Sein Verdienst war es auch, dass im Jahre 1886 die Elektrotechnische Ingenieurschule zu Turin, die erste Lehranstalt dieser Art in Italien, erstand. In den letzten Jahren vor seinem Tode war er der Direktor des „Reale Museo".

Das für die Elektrotechnik wichtigste von ihm bearbeitete Forschungsgebiet war das der Wechselströme und der aus dem Zusammenwirken von Wechselströmen mit verschiedener Phase entstehenden magnetischen Felder. Im Jahre 1888 erschien seine epochemachende Abhandlung „Rotazioni elettrodinamiche", in welcher das Gesetz der magnetischen Wirkungen von Wechselströmen verschiedener Phase zum ersten Male in abgeschlossener Form gegeben wurde. Er selbst und insbesondere die neuere elektrotechnische Industrie wurden durch diese Betrachtungen auf die Konstruktion von Wechselstrommotoren geführt, deren rotierende Anker keine Stromzuführungen mehr besassen, welche asynchron liefen und bei denen die fundamentalen Nachteile der einphasigen Wechselstrommotoren vermieden waren. Das von Ferraris begründete magnetische Drehfeld ist die Grundlage geworden für die ganze moderne Entwickelung der Drehstrom-Systeme.

Gelegenheit des internationale
, als dem Präsidenten des Ko
schiedenen benachbarten Länder
ren, unterlag es keinem Zweife
f Ferraris fallen musste. D
kfurt Gelegenheit gehabt, nebe
en ausserordentlich liebenswürdige
kennen zu lernen. Er hat dort s
te erworben. Es ist uns Deutsche
in diesem in deutscher Sprach
Andenken an Ferraris überliefe

den Titel so treffend bezeichne
scheint. Was ich hervorheben möcht
e, einfache und elegante Behandlun
n Kreisen deutscher Elektrotechnike
sich ausüben, einen grossen Freunde

Dr. W. Kohlrausch.

Es ist mir eine angenehme Pflicht, an dieser Stelle den Herren Dr. Blochmann, Dir. Maffiotti und Ing. Raydt für ihre wertvolle Unterstützung, und der Verlagsbuchhandlung Teubner für die angenehme Art, mit der sie die Verhandlungen geführt und für die schöne Ausstattung des Bandes gesorgt hat, meinen Dank auszusprechen.

Aachen, Juli 1901.

Dr. Leo Finzi.

Inhaltsverzeichnis.

Erstes Kapitel.

Einleitung. Definitionen und allgemeine Sätze über Vektoren.

§ 1.

Feld eines Vektors.

Seite

1. Skalar- und Vektorgrössen 1
2. Addition und Subtraktion von Vektoren 2
3. Feld eines Vektors 3
4. Fluss eines Vektors durch eine Fläche 3
5. Fluss eines Vektors durch eine geschlossene Fläche 4
6. Divergenz 6
7. Solenoidische Verteilung 7
8. Niveauflächen 7
9. Linienintegral eines Vektors 8
10. Potential 9
11. Bestimmung des Vektors durch das Potential 10
12. Flusslinien und Flussröhren 12
13. Änderung des Vektors längs einer unendlich dünnen Flussröhre 13
14. Einheitsröhren 14
15. Darstellung des Feldes eines Vektors 14
16. Gleichförmiges Feld 16

§ 2.

Kraftfelder.

17. Massen oder Mengen von Agens 17
18. Potential. Arbeit 19

§ 3.

Newton'sche Kraftfelder.

19. Newton'sche Kräfte 21
20. Potential in den Newton'schen Kraftfeldern 23
21. Energie 24
22. Kraftflüsse. Sätze von Stokes und Green. Solenoidische Bedingung 26
23. Dichte des Agens. Gleichungen von Poisson und Laplace 30

Zweites Kapitel.

Elektrizität.

§ 1.

Elektrischer Gleichgewichtszustand.

Seite

24. Elektrisierung durch Reibung 32
25. Leiter und Nichtleiter oder Konduktoren und Isolatoren 33
26. Zwei Arten von Elektrizität 34
27. Elektrisierung durch Influenz 35
28. Elektrische Anziehung und Abstossung 36
29. Elektrisches Feld 37
30. Grundgesetze des elektrischen Gleichgewichtszustandes 37
31. Elektrisches Potential 39
32. Elektrische Flächendichte. Beziehung zwischen elektrischer Dichte und elektrischer Kraft 41
33. Elektrostatischer Druck 42
34. Verteilung der Elektrizität auf der Oberfläche der Konduktoren. Spitzenwirkung 45
35. Korrespondierende Flächen 46
36. Darstellung von besonderen elektrischen Feldern. Elektrostatische Influenz . 47
37. Elektrisierter Körper in einem hohlen Konduktor 51
38. Änderung der Verteilung der Massen ohne Veränderung der Verteilung der Kraft in gewissen Raumgebieten 52
39. Geradlinige und zylindrische Verteilung 52
40. Elektrostatische Kapazität 56
41. Kondensatoren 58
42. Spezifisches Induktionsvermögen oder Dielektrizitätskonstante 60
43. Polarisation. Verschiebung 63
44. Physikalische Bedeutung der konstanten Faktoren k und ε 69
45. Energie eines elektrischen Feldes 70
46. Parallel- und Hintereinanderschaltung von Kondensatoren. Kapazität einiger Kondensatoren 72

§ 2.

Elektrischer Strom.

47. Elektrisierung durch Kontakt 81
48. Hydroelelektrisches Element 83
49. Thermoelektrisches Element 84
50. Konduktoren, die sich in einem magnetischen Felde bewegen 84
51. Elektromotorische Kraft 85
52. Allgemeine Gleichgewichtsbedingungen 87
53. Elektrischer Strom 90
54. Ohm'sches Gesetz 94
55. Gesetze von Kirchhoff 98
56. Stromverzweigung 99

Seite
[illegible] 103
[illegible] 104
[illegible] 106
[illegible] 111

Drittes Kapitel.

Magnetismus.

§ 1.

Magnetische Kräfte. Magnetische Massen. Magnetische Felder.

[illegible] 114
[illegible] 116
[illegible] 119
[illegible] 121
[illegible] 122
[illegible] 124
[illegible] 128

§ 2.

Magnetisierung. Verteilung des Magnetismus in den Magneten.

[illegible] 130
[illegible] 131
[illegible] 133
[illegible] 134
[illegible] 135
[illegible] 136
[illegible] 137
[illegible] 144
[illegible] 146

§ 3.

Kräfte im Innern eines Magneten. Magnetische Induktion.

[illegible] 150
[illegible] 153
[illegible] 154
[illegible] 161
[illegible] 166
[illegible] 167

Seite

83. Magnetische Suszeptibilität und Permeabilität. Diamagnetische und paramagnetische Körper 168
84. Magnetische Eigenschaften der magnetischen Materialien 175
85. Einfluss der chemischen Zusammensetzung und der physikalischen Zustände 180
86. Magnetischer Kreisprozess. Hysteresis 181
87. Retentionsvermögen. Koerzitivkraft 184

§ 4.

Magnetische Feldenergie.

88. Arbeit, die von den magnetischen Kräften zur Veränderung der Verschiebung geleistet wird 187
89. Hysteretische Körper. Zyklische Magnetisierungsprozesse 190
90. Körper ohne Hysteresis. Feldenergie 191

Viertes Kapitel.

Elektromagnetismus.

§ 1.

Magnetische Felder, welche durch Änderungen der elektrischen Verschiebung erzeugt werden.

91. Magnetische Wirkungen elektrischer Ströme. Geradlinige und kreisförmige Strombahn. Solenoid 194
92. Analogie zwischen den von elektrischen Strömen und den von Magneten hervorgerufenen Feldern 199
93. Prinzip der Äquivalenz 200
94. Äquivalenz zwischen einem magnetischen Blatte und einem Strome im endlichen, geschlossenen Kreise. Elektromagnetisches Masssystem . . . 203
95. Tragweite des Prinzips der Äquivalenz. 205
96. Geradliniger Strom. Gesetz von Biot und Savart 207
97. Zylindrisches, geradliniges Solenoid 209
98. Verteilung des magnetischen Potentials 213
99. Verteilung des Potentials im Felde eines geradlinigen Stromes. 216
100. Allgemeine Beziehung zwischen der elektrischen Verschiebung und dem erzeugten magnetischen Felde 217
101. Einfluss der freien magnetischen Massen und der Beschaffenheit der Materialien des Feldes 218
102. Berechnung der magnetischen Kreise. Analogie mit dem Ohm'schen Gesetze und den Kirchhoff'schen Prinzipien 222
103. Strom in einem magnetischen Felde. Energie. Arbeit 225
104. Deformierbare Stromkreise. Kraftwirkungen des magnetischen Feldes auf endliche oder unendlich kleine Teile von Strombahnen 226
105. Ströme in dem von einer einzigen Masse erzeugten Felde. Kreisstrom. Elektromagnetische Einheit der Stromstärke 229

§ 2.

Elektromotorische Kräfte, welche von Änderungen der magnetischen Verschiebung hervorgebracht sind.

Seite

106. Elektromagnetische Induktion 230
107. Gesetze von Lenz und Neumann 233
108. Induzierte Elektrizitätsmenge 234
109. Allgemeine Beziehung zwischen der Änderung der magnetischen Verschiebung und der induzierten E. M. K. 234
110. Ströme, induziert durch Änderung der Stromstärke. Koeffizient der gegenseitigen Induktion und der Selbstinduktion 236

Fünftes Kapitel.

Veränderliche Ströme.

§ 1.

Grundgesetze und allgemeine Betrachtungen.

111. Ohm'sches Gesetz 241
112. Extraströme beim Schliessen und Öffnen des Stromkreises 242
113. Arbeit eines veränderlichen Stromes. Innere Stromenergie 242
114. Mechanische Analogien. Natur des elektrischen Stromes 247

§ 2.

Wechselströme.

115. Alternierende Grössen. Graphische Darstellung. Definitionen 248
116. Sinoïdale alternierende Grössen. Polare Darstellung, Summierung und Differentiation 252
117. Sinoïdale Wechselströme in Stromkreisen mit Ohm'schem und induktivem Widerstand 256
118. Einfluss der Kapazität in Wechselstromkreisen 261
119. Wechselstromkreise mit Widerstand, Induktanz und Kapazität 263
120. Elektrische Resonatoren 267
121. Potentialdifferenz zwischen zwei Punkten eines Wechselstromkreises . . . 269
122. Stromverzweigung 271
123. Arbeit eines Wechselstromes 274
124. Induktanz und Kapazität der elektrischen Leitungen 277
125. Wirkung der Induktanz und der Kapazität in einem Wechselstromnetze. Ferranti'sches Phänomen 279
126. Berechnung der Kapazität eines Netzes 283
127. Berechnung der Induktanz in einem Verteilungsnetze 284
128. Der Skin-Effekt. Gleichungen von Lord Kelvin. Zunahme des Ohm'schen Widerstandes eines Leiters 289

§ 3.

Entladungsströme der Kondensatoren.

Seite
129. Lord Kelvins Gleichungen 295
130. Aperiodische und oscillierende Entladung 297
131. Eigenschaften der Entladungsströme. Blitzableiter. Tesla-Ströme 302

Sechstes Kapitel.

Fortpflanzung der elektromagnetischen Schwingungen.

§ 1.

Maxwells elektromagnetische Lichttheorie.

132. Fortpflanzung einer elektromagnetischen Schwingung in einem vollkommen nichtleitenden Medium 305
133. Besonderer Fall. Fortpflanzung durch ebene Wellen 310
134. Fortpflanzung einer elektromagnetischen Schwingung in einem beliebigen Medium 314
135. Fortpflanzung einer elektromagnetischen Schwingung in einem vollkommen leitenden Medium 314
136. Maxwell'sche Hypothese über die Beschaffenheit des Lichtes und deren hauptsächlichste experimentelle Bestätigungen 316

§ 2.

Hertz'sche Versuche.

137. Zweck der Versuche 318
138. Praktische Anordnung der Hertz'schen Versuche. Erreger. Resonator . . 319
139. Experimentelle Ergebnisse 323

§ 3.

Fortpflanzung der Energie in einem elektromagnetischen Felde.

140. Gleichung und Hypothese von Poynting 329
141. Besonderer Fall eines geradlinigen Stromes. Teilnahme des Dielektrikums und des Leiters an der Übertragung 335
142. Tragweite der Poynting'schen Theorie 338
143. Die Energiewanderung findet thatsächlich im Dielektrikum und nicht in dem Leiter statt. 340
144. Allgemeine Betrachtungen über die obigen Theorien 343

Anhang.

Allgemeine Bemerkungen über die elektrischen und magnetischen Masseinheiten.

Seite

1. Grund- und abgeleitete Einheiten. Absolutes C. G. S.-System 346
2. Geometrische, kinematische und mechanische Grössen 348
3. Magnetische Grössen 349
4. Elektrische Grössen 350
5. Beziehung zwischen den Einheiten der beiden Systeme 352
6. Praktisches Masssystem 354
7. Absolute und relative Messungen. Normalien der praktischen Einheiten . . 355
8. Beschlüsse des internationalen elektrotechnischen Kongresses in Chicago bezüglich der elektrischen Masseinheiten 356

Bemerkung.

Im Texte ist auf die Formeln durch Zahlen in runden Klammern ( ), auf die Abschnitte durch Zahlen in eckigen Klammern [ ] hingewiesen.

Erstes Kapitel.

itung. — Definitionen und allgemeine Sätze über die Vektoren.

§ 1.

Feld eines Vektors.

Skalar- und Vektorgrössen. — Die Grössen, welche sich beim n der physikalischen Erscheinungen unseren Betrachtungen dar- zerfallen in zwei Klassen.

r ersten Klasse gehören die Grössen an, die durch eine einfache, sche Angabe vollständig definiert werden können, welche das Ver- zwischen der betrachteten und einer anderen, als Einheit ge- nen, gleichartigen Grösse ausdrückt; sie werden *Skalargrössen* t.*) Beispiele von Skalargrössen sind: die Länge einer Linie, das en eines geometrischen festen Körpers, die Masse eines materiellen s, der hydrostatische Druck im Innern einer Flüssigkeit, die Dichte Körpers, die Temperatur in einem Punkte des Raumes etc.

r zweiten Klasse gehören die Grössen an, denen eine Richtung nt, und die deswegen nur durch drei Angaben, wie z. B. durch eine und zwei Winkel oder durch die drei Komponenten nach drei natenachsen vollständig definiert werden können. Man nennt die n dieser Art *Vektorgrössen* oder *Vektoren.***) ektorgrösse lässt sich immer darstellen durch gs einer geraden Linie von bestimmter Rich- folgende Verschiebung eines Punktes um eine nte Strecke. So giebt uns z. B. eine Strecke ig. 1) die geometrische Darstellung eines s, der als Richtung die Richtung OA und als numerischen Wert des Vektors) die in einem passenden Massstabe gemessene Länge esitzt. Die Wahl des Ursprunges O, des Ausgangspunktes des

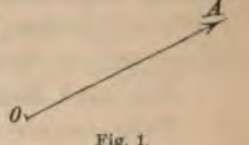


Fig. 1.

*) Der Ausdruck: „*Skalargrösse*“ ist gebildet in Anlehnung an das englische : *to scale = wägen, messen.*

**) Der Ausdruck: „*Vektorgrössen*“ ist gebildet in Anlehnung an das lateinische : *vehere = fahren.*

Vektors, ist bei der Darstellung des letzteren ganz willkürlich. Zwei Vektoren sind einander gleich, wenn sie dieselbe Grösse und dieselbe Richtung haben.

Beispiele von Vektorgrössen sind: die Kraft, welche auf einen materiellen Punkt wirkt, die Beschleunigung, die sie diesem erteilt, die Verschiebung, die er erfährt, und dergl.

2. Addition und Subtraktion von Vektoren. — Indem wir die Verschiebung eines Punktes als Darstellung eines Vektors betrachten, ergiebt sich sogleich, welche Bedeutung der Summe zweier Vektorgrössen beizulegen ist.

Wenn man nämlich einem Punkte eine Verschiebung OA (Fig. 2) und nachher noch eine Verschiebung AB in einer beliebigen andern Richtung erteilt, hat man dadurch erzielt, dass der Punkt von O nach B gekommen ist, was man auch direkt durch die Verschiebung des Punktes in der Richtung OB erreichen kann. Es liegt daher nahe, die Strecke OB die Summe der beiden Vektoren OA und AB zu nennen.

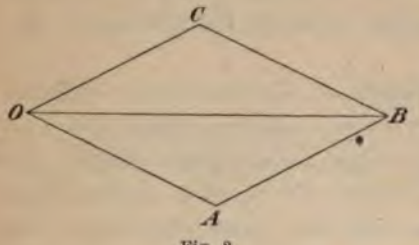


Fig. 2.

Der Vektor OB kann auch als Summe der beiden Vektoren OC und CB aufgefasst werden, welche bezw. gleich (in dem für Vektorgrössen giltigen Sinne) den Vektoren AB und OA sind. Die Summe zweier Vektoren ist also unabhängig von der Reihenfolge, in welcher man dieselben betrachtet.

Die Addition der Vektoren ist, wie man sieht, dieselbe Operation wie sie in der Mechanik zur Veranschaulichung der Zusammensetzung von Kräften angewendet wird. OB kann *Vektorsumme* oder *resultierender Vektor* der beiden Vektoren OA und AB, letztere können *Vektorkomponenten* genannt werden.

Man kann danach folgende Sätze aussprechen:

Vektorsumme oder resultierender Vektor zweier gegebener Vektoren ist der Vektor, der von der Diagonale des Parallelogramms dargestellt wird, dessen Seiten gleich und parallel den gegebenen Vektoren sind, (oder auch von der Geraden, welche mit den beiden an einander gefügten Vektoren ein Dreieck bildet).

Vektorsumme oder resultierender Vektor mehrerer Vektoren ist der Vektor, der von der Strecke dargestellt wird, die das Polygon schliesst, dessen Seiten parallel und gleich den nach einer beliebigen Reihenfolge genommenen, zu summierenden Vektoren sind.

Die Vektorsumme ist Null, wenn sich das Polygon der komponierenden Vektoren von selbst als ein geschlossenes ergiebt.

Als besonderer Fall ist die Summe der beiden Vektoren OA und AB gleich Null, wenn die beiden Punkte B und O zusammenfallen; es ist dann

$$OA + AO = 0 \quad \text{oder} \quad OA = -AO.$$

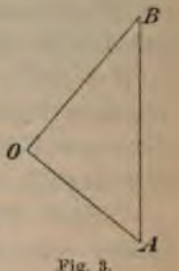


Fig. 3.

Zwei gleichgrosse, aber entgegengesetzt gerichtete Vektoren müssen als mit entgegengesetzten Vorzeichen behaftet angesehen werden; ihre Summe ist gleich Null.

Von dieser Betrachtung ausgehend, kann man auch von *Vektordifferenz* zweier Vektoren reden. So hat man nach den obigen Sätzen und Definitionen (Fig. 3):

$$AB = AO + OB = OB + AO = OB - OA.$$

Der Vektor AB kann also Differenz der Vektoren OB und OA genannt werden.

3. Feld eines Vektors. — Man nennt *Feld eines Vektors* den Raum, in welchem sich der Vektor befindet, oder in welchem wir ihn betrachten wollen.

Ein Feld kann den ganzen unendlichen Raum umschliessen oder von einer oder mehreren Flächen begrenzt oder eingeschlossen werden.

Wenn für jeden Punkt des Feldes der Wert und die Richtung als Funktionen der Koordinaten des Punktes bekannt sind, so sagt man, die *Verteilung des Vektors* ist innerhalb des Feldes bekannt.

Beim Studium der Verteilung eines Vektors in seinem Felde ist es nützlich, einige mit dem Vektor selbst zusammenhängende Skalargrössen und zwar den *Fluss des Vektors durch eine Fläche* und das *Integral des Vektors längs einer Linie* ins Auge zu fassen.

4. Fluss eines Vektors durch eine Fläche. — Im Felde eines Vektors betrachte man im Punkte O (Fig. 4) ein Flächenelement AB vom Inhalt dS.

Es sei NN' die Normale des Elementes, deren positive Richtung von O nach N zeige; ferner sei der im Punkte O angreifende Vektor durch die Strecke OF dargestellt und Θ sei der Winkel,

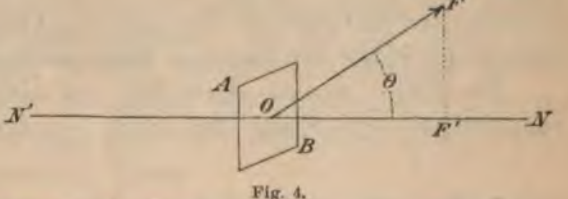


Fig. 4.

welchen er mit der positiven Richtung der Normalen bildet. Ist OF' die Projektion von OF auf die Normale $N'N$, so stellen die beiden Vektoren

OF' und $F'F$ die Komponenten des Vektors OF dar, genommen in einer zum Flächenelement normalen und einer zu demselben parallelen Richtung, während der Vektor OF als Vektorsumme dieser beiden betrachtet werden kann.

Man bezeichne mit f und $f_n = f\cos\Theta$ die numerischen Werte der beiden Vektoren OF und OF'. Man nennt dann das Produkt $f_n dS = f dS\cos\Theta$, gebildet aus der Komponenten des Vektors nach der positiven Richtung der Normalen und der Fläche des Elementes, den *Fluss des Vektors durch das Flächenelement* oder das *Integral des Vektors über das Element.*

Dieser Fluss kann positiv oder negativ sein, je nachdem Θ ein spitzer oder stumpfer Winkel ist. Das Vorzeichen des Flusses hängt somit von der Wahl der positiven Richtung auf der Normalen ab.

Wir betrachten nun eine endliche, beliebig begrenzte Fläche SS und denken sie in ihre Flächenelemente zerlegt.

Man nennt *Fluss durch die Fläche* SS die Summe der Flüsse durch die einzelnen Flächenelemente. Wenn wir ihn mit φ bezeichnen, haben wir

$$\varphi = \int_S f_n\, dS = \int_S f\cos\Theta\, dS.$$

Der Index S bei dem Integralzeichen deutet an, dass die Integration über die ganze Fläche SS ausgedehnt werden muss. Wie bei dem Elementarfluss, so hängt auch für eine endliche Fläche das Vorzeichen von der Wahl der positiven Richtung der Normalen ab.

Nimmt man an, dass in jedem Punkte des Feldes zwei oder mehrere Vektoren derselben Art vorkommen, so kann man durch jedes Flächenelement und folglich durch irgend eine begrenzte Fläche den Fluss der einzelnen Vektoren und auch den des resultierenden Vektors betrachten. Da in jedem Punkte des Feldes die Komponente des resultierenden Vektors nach irgend welcher Richtung gleich der algebraischen Summe der Komponenten der einzelnen komponierenden Vektoren nach derselben Richtung ist, so ist für jedes Flächenelement und folglich auch für eine beliebig begrenzte Fläche der Fluss des aus mehreren Vektoren resultierenden Vektors durch das Element oder durch die Fläche gleich der algebraischen Summe der Flüsse der einzelnen komponierenden Vektoren.

Die Flüsse werden algebraisch und nicht nach Art der Vektoren summiert; sie sind Skalar- und nicht Vektorgrössen.

5. Fluss eines Vektors durch eine geschlossene Fläche. — In einer geschlossenen Fläche können wir als positive Richtung der Normalen die nach innen oder diejenige nach aussen wählen. Im ersten Falle kann der

Fluss in die Fläche oder in den von der Fläche eingeschlossenen Raum *eintretend*, im zweiten aus der Fläche oder aus dem von der Fläche eingeschlossenen Raume *austretend* genannt werden. Aus dem Umstande, dass, wenn man die Richtung der Normalen umkehrt, auch das Vorzeichen des Flusses geändert wird, folgt, dass der in eine geschlossene Fläche eintretende Fluss entgegengesetzt gleich dem aus der Fläche austretenden Flusse ist.

Denken wir uns das von der geschlossenen Fläche S begrenzte Volumen V in eine gewisse Zahl von Teilen v zerlegt, so können wir den aus dem ganzen Volumen V austretenden Fluss, wie auch die aus den einzelnen Teilen v dieses Volumens austretenden Flüsse betrachten. Man kann leicht erkennen, dass die Summe der aus den einzelnen Teilen v austretenden Flüsse, wenn die Verteilung des Vektors innerhalb der Fläche S keine Unstetigkeit bietet, gleich dem aus dem ganzen Volumen V austretenden Fluss ist. Um dies zu beweisen, genügt es, zwei beliebige Teile v, welche unmittelbar nebeneinander liegen, zu betrachten; z. B. die Teile p und q (Fig. 5), welche die gemeinsame Seite $abcd$ besitzen. Der Fluss, der durch die Fläche $abcd$ hindurchgeht, tritt von einem der beiden Volumina p und q aus und in das andere ein; er ist ein positiver Teil des aus dem ersten Volumen austretenden und ein positiver Teil des in das zweite Volumen eintretenden Flusses, also ein negativer Teil des aus dem zweiten Volumen austretenden Flusses. In Folge dessen haben wir in der Summierung der aus p und q austretenden Flüsse zwei gleiche, mit entgegengesetzten Vorzeichen versehene Posten, welche sich gegenseitig aufheben. — In dieser Weise heben sich alle Flüsse gegenseitig auf, die aus solchen Flächen der Teilvolumina v austreten, welche mit Flächen benachbarter Teilvolumina zusammenfallen. Da nun die Summe aller Teilvolumina v das Volumen V bildet, so bleiben schliesslich nur die Flüsse erhalten, die durch solche Flächen der Teilvolumina v hindurchgehen, welche der Fläche S angehören; die Summe dieser Flüsse ergiebt den aus der Fläche S austretenden Fluss.

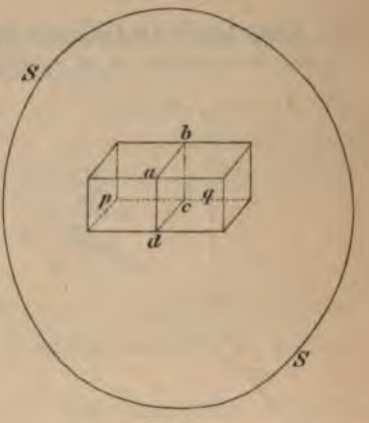


Fig. 5.

Dasselbe gilt in entsprechender Weise von den eintretenden Flüssen.

6. Divergenz. — Wenn wir im Felde eines Vektors ein Volumen v betrachten, und mit φ den aus der Begrenzungsfläche dieses Volumens austretenden Fluss des Vektors bezeichnen, so ergiebt der Quotient $\frac{\varphi}{v}$ den Mittelwert des aus der Volumeneinheit austretenden Flusses. Wenn v in einem bestimmten Punkte nach Null konvergiert, so strebt φ auch nach Null, aber ihr Verhältnis kann nach einem endlichen Limes $\frac{d\varphi}{dv}$ konvergieren, welcher eine Skalargrösse, und zwar eine Funktion derjenigen Veränderlichen ist, durch welche die Lage des Punktes bestimmt wird.

Von Maxwell, für welchen, da er sich an die Hamilton'sche Quaternionenlehre anlehnte, die Betrachtung des eintretenden Flusses näher lag, ist vorgeschlagen worden, der Grösse $\left(-\frac{d\varphi}{dv}\right)$ den Namen *Konvergenz des Vektors* zu geben; Heaviside nannte in Nachahmung dieser Bezeichnung die Grösse $\frac{d\varphi}{dv}$, die wir hier betrachten, *Divergenz des Vektors.* Diesen Ausdruck werden wir auch im Folgenden verwenden.

Analytischer Ausdruck der Divergenz. — Es seien in einem Punkte M (Fig. 6) mit den Koordinaten x, y, z, durch X, Y, Z die Komponenten des Vektors nach drei Koordinatenaxen bezeichnet. Wir setzen dabei voraus, dass diese Grössen X, Y, Z stetige Funktionen der Koordinaten x, y, z sind, und berechnen nun den aus der Fläche des elementaren Parallelepipeds $MABC$ mit den Seiten dx, dy, dz austretenden Fluss.

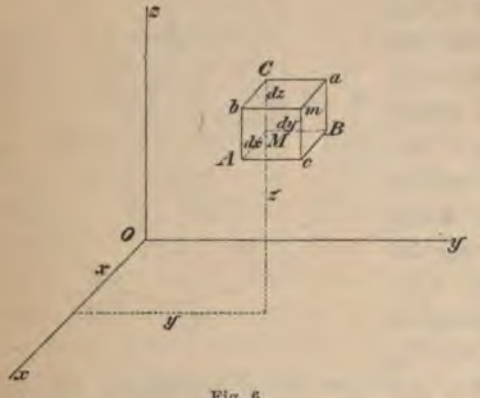


Fig. 6.

Durch die zu der Axe Ox senkrechte Fläche $MBaC$ tritt in das Parallelepiped ein Fluss ein, der gleich $X\,dy\,dz$ ist, durch die parallele Fläche $mbAc$ tritt aus dem Parallelepiped ein Fluss gleich $\left(X+\frac{\partial X}{\partial x}dx\right)dy\,dz$ aus; folglich tritt im ganzen in der Richtung Ox ein Fluss aus, der gleich der Differenz der beiden ist, nämlich

$$\frac{\partial X}{\partial x}\,dx\,dy\,dz \quad \text{oder} \quad \frac{\partial X}{\partial x}\,dv.$$

Analog erhalten wir in den Richtungen Oy und Oz bezw. die Flüsse

$$\frac{\partial Y}{\partial y}\,dv \quad \text{und} \quad \frac{\partial Z}{\partial z}\,dv.$$

Daraus ist der ganze aus der Fläche des Parallelepipeds austretende Fluss

$$d\varphi = \left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}\right)dv,$$

und folglich ist die Divergenz des Vektors

$$\frac{d\varphi}{dv} = \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}. \tag{1}$$

Die Konvergenz hat denselben Wert mit entgegengesetztem Vorzeichen.

7. Solenoidische Verteilung. — Ist in jedem Punkte eines Raumes die Divergenz Null, dann sagt man, der Vektor besitzt darin *eine solenoidische Verteilung.**)

Wenn aber die Divergenz gleich Null ist, d. h. wenn der aus jedem Volumenelemente des Raumes austretende Fluss gleich Null ist, so ist auch der aus einer beliebigen, geschlossenen Fläche austretende Fluss gleich Null [5]. Folglich gleicht die gegebene Definition der anderen: ein Vektor besitzt im Felde solenoidische Verteilung, wenn der aus einer geschlossenen Fläche austretende Fluss gleich Null ist; es ist dabei gleichgiltig, welche Gestalt die Fläche habe und wie dieselbe im Felde liege.

8. Niveauflächen. — Eine in jedem ihrer Punkte zu der Richtung des Vektors senkrechte Fläche nennt man *Niveaufläche.*

Für eine Niveaufläche vereinfacht sich der Ausdruck des Flusses, denn man hat, da in diesem Falle der Vektor mit seiner Normalkomponenten zusammenfällt, $\Theta = 0$, $f_n = f$, und folglich ist der Fluss durch den Ausdruck

$$\int_S f\,dS$$

gegeben. Wenn wir ein Stück einer Niveaufläche vom Inhalt S betrachten, durch welches der Fluss den Wert $\Phi = \int_S f\,dS$ hat, so können wir als den *Mittelwert des Vektors in dem Stücke S der Niveaufläche* den Wert f_m bezeichnen, den ein in jedem Punkte der betrachteten Fläche konstanter und zur Fläche senkrechter Vektor annimmt, wenn er durch S denselben Fluss hervorbringen soll, wie der Fluss, der von dem betrachteten Vektor hervorgebracht wird.

Der Mittelwert f_m ist also durch die Gleichungen definiert

$$f_m S = \int_S f\,dS,$$

$$f_m = \frac{\Phi}{S}. \tag{2}$$

*) Diese Bezeichnung rührt von Maxwell her, während Faraday hierfür den Ausdruck *spondyloidisch* gebrauchte.

Wenn die Fläche S in einem gegebenen Punkte nach Null konvergiert, so strebt f_m nach dem Werte f, den der Vektor in diesem Punkte besitzt.

Daraus folgt, dass man, wenn der Fluss Φ gegeben ist, einen angenäherten Wert f_m des Vektors in einem Punkte erhalten kann; einen Wert, der um so mehr dem exakten Wert f gleichkommt, je kleiner die um den Punkt betrachtete Fläche ist.

9. Linienintegral eines Vektors. — Es sei AMB (Fig. 7) eine beliebige, im Felde eines Vektors beschriebene Linie; man wähle auf derselben eine Richtung als die positive, z. B. die Richtung AB. Ferner sei $MF = f$ der Vektor in einem Punkte M der Linie, $MM' = ds$ ein von M aus positiv betrachtetes Element derselben Linie und ε der von f mit ds gebildete Winkel. Die Tangentialkomponente des Vektors, d. h. die Projektion von f auf die Tangente MT ist $f_s = f \cos \varepsilon$. Man bilde das Produkt $f_s ds$ für alle Elemente der Linie AB, dann summiere man alle diese unendlich kleinen Skalargrössen, d. h. man bilde das Integral

$$\int_{AB} f_s ds = \int_{AB} f \cos \varepsilon \, ds;$$

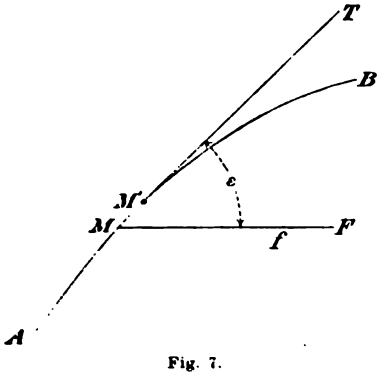


Fig. 7.

diesen Ausdruck nennt man *Integral* (oder *Fluss*) *des Vektors über die Linie* (oder *längs der Linie*) AB. Durch den am Fusse des Integralzeichens gesetzten Index AB soll daran erinnert werden, dass die Integration sich über die ganze Linie AB erstreckt, und ferner dass sie in der Richtung von A nach B geschieht. Also

$$\int_{AB} f_s ds = -\int_{BA} f_s ds.$$

In analoger Weise wie bei den Flüssen durch Flächen ergiebt sich, dass das Integral eines aus mehreren Vektoren resultierenden Vektors längs einer Linie gleich der algebraischen Summe der Integrale der einzelnen komponierenden Vektoren längs derselben Linie ist.

Die Linienintegrale der Vektoren werden algebraisch und nicht nach Art der Vektoren summiert; sie sind Skalar- und nicht Vektorgrössen.

10. Potential.*) — Im allgemeinen hängt der Wert des Integrals des Vektors längs einer Linie von der Form der Linie ab. Es kann aber auch sein, dass die Verteilung des Vektors eine solche ist, dass dessen Integral längs irgend einer im Felde beschriebenen Linie lediglich von der Lage der äussersten Punkte abhängt; dann ist das Integral für alle durch dieselben Endpunkte begrenzten Linien stets dasselbe und das Integral längs einer geschlossenen, sonst beliebigen Linie gleich Null. Für das Eintreten dieses uns besonders interessierenden Falles ist es notwendig und genügend, dass die zu integrierende Funktion $f_s ds$ das vollständige Differential einer Funktion der Koordinaten ist. Wenn diese Bedingung erfüllt ist, und wir durch V eine Funktion der Koordinaten bezeichnen, welche wir *Potential* nennen werden, können wir setzen:

$$-dV = f_s ds, \tag{3}$$

$$V_A - V_B = \int_{AB} f_s ds. \tag{4}$$

Das Potential ist daher, als durch die Integration einer Differentialgleichung definiert, bestimmt, abgesehen von einer willkürlichen additiven Konstanten. Vollständig bestimmt ist dagegen die *Potentialdifferenz* zwischen den beiden Punkten A und B, d. h. das Integral des Vektors längs einer beliebigen die Punkte A und B verbindenden Linie, weil in diesem Falle die beiden gleichen, mit entgegengesetzten Vorzeichen auftretenden, additiven Konstanten sich heben.

Das Potential ist eine Skalargrösse.

Wenn man Orthogonal-Koordinaten wählt, hat man

$$f_s ds = X dx + Y dy + Z dz.$$

Damit ein solches Trinomium ein vollständiges Differential sei, müssen die folgenden drei Bedingungsgleichungen erfüllt sein:

$$\frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y} = 0,$$

$$\frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial z} = 0,$$

$$\frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x} = 0.$$

Wenn diese Gleichungen bestehen, dann sind das Potential und die Potentialdifferenz zwischen zwei Punkten durch die Beziehungen bestimmt:

$$-dV = X dx + Y dy + Z dz, \tag{3'}$$

$$V_A - V_B = \int_{AB} (X dx + Y dy + Z dz). \tag{4'}$$

*) Diese Bezeichnung rührt von Gauss her, während unabhängig von ihm Green den Ausdruck *Potentialfunktion* gebrauchte; wir werden die kürzere Gauss'sche Bezeichnung anwenden.

Wir wollen den für uns ausserordentlich wichtigen Begriff *Potential* noch weiter erläutern.

Es sei das Feld eines Vektors gegeben, in welchem die obige Bedingung erfüllt wird, d. h. wo das Integral längs irgend einer Linie nur von der Lage ihrer Endpunkte abhängt.

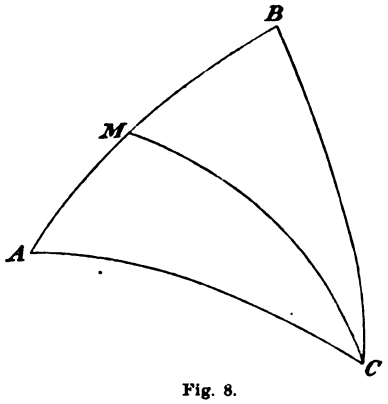


Fig. 8.

Im Felde wählen wir ganz willkürlich einen Punkt C (Fig. 8), durch eine beliebige Linie CM verbinden wir ihn mit einem anderen Punkte M und bezeichnen mit V das von M nach C längs dieser Linie genommene Integral. Der Wert von V hängt nicht von der Form der Linie, sondern nur von der Lage der Punkte C und M ab und, wenn der Punkt C als fest betrachtet wird, nur von der Lage des Punktes M; der Wert von V ist eine Funktion von denjenigen Veränderlichen, durch welche die Lage des Punktes M definiert wird. Sind V_A und V_B die Werte von V in den Punkten A und B, so kann das Integral, von A nach B längs der die Punkte A und B mit einander verbindenden, sonst beliebigen Linie AMB genommen, durch diese zwei Werte ausgedrückt werden. Und zwar ist das Integral längs der Linie AMB gleich demjenigen, das längs irgend einer anderen von A ausgehenden und in B endigenden Linie genommen ist; es ist also auch gleich dem längs der Linie ACB genommenen Integral. Nun ist der Wert des Integrals längs der Linie AC gleich V_A und jener des Integrals längs der Linie CB gleich $-V_B$, also ist

$$\int_{AB} f_s ds = V_A - V_B;$$

das von A nach B längs einer beliebigen, diese Punkte verbindenden Linie genommene Integral des Vektors ist gleich der Differenz der Werte, welche die Funktion V (der wir den Namen *Potential* gegeben haben) in den Punkten A und B besitzt.

Auch hieraus ergiebt sich, dass das *Potential in einem Punkte* bis auf beliebige, konstante Parameter, welche von der Wahl des Punktes C abhängen und der Integrationskonstanten entsprechen, die *Potentialdifferenz zwischen zwei Punkten* dagegen vollständig definiert ist.

11. Bestimmung des Vektors durch das Potential. — Wenn in jedem Punkte der Wert des Potentials als Funktion der Koordinaten gegeben ist, so ist auch die Verteilung des Vektors bestir

Um dies zu erklären, betrachten wir anstatt der im vorigen Abschnitte angenommenen endlichen Linie AB ein einfaches Element ab (Fig. 9), nehmen wir die Richtung von a nach b positiv an, und bezeichnen wir die Länge des Elementes ab mit ds. Anstatt des oben betrachteten Integrals haben wir jetzt ein einfaches Element, welches wir durch $f_s ds$ ausdrücken können, wenn f_s die Projektion des Vektors f auf die Richtung ab ist.

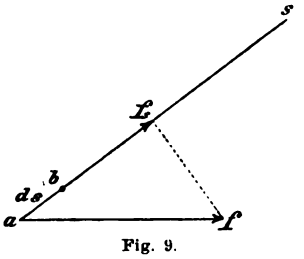


Fig. 9.

Wenn wir andererseits nach der gewöhnlichen Bezeichnung der Differentialrechnung mit $\frac{dV}{ds}$ den Limes des Verhältnisses $\frac{V_b - V_a}{ds}$ darstellen, wobei wir, die gegebene Richtung ab festhaltend, ds bis zu Null konvergieren lassen, so können wir schreiben:

$$V_a - V_b = -\frac{dV}{ds} ds.$$

Dadurch wird die Gleichung (3), welche die Definition des Potentials vorstellt, in dem jetzt betrachteten Falle zu

$$f_s ds = -\frac{dV}{ds} ds.$$

Daher

$$f_s = -\frac{dV}{ds}. \tag{5}$$

Das Vorzeichen — zeigt, dass die positive Richtung des Vektors diejenige ist, nach welcher das Potential sinkt.

Betrachten wir zwei spezielle, wichtige Fälle:

I. Das Element ds gehöre einer Niveaufläche, d. h. einer zum Vektor senkrechten Fläche an; die Vektorkomponente nach ds ist gleich Null, $f_s = 0$, folglich $\frac{dV}{ds} = 0$. Das gilt für jeden Punkt der Niveaufläche, und man hat daher für dieselbe

$$V = \text{Konst.}$$

Eine Niveaufläche ist somit eine *Aquipotentialfläche.*

II. Wenn wir das Element ds auf der Normalen zu der Niveaufläche wählen, die durch den betrachteten Punkt geht, und dasselbe mit dn bezeichnen, so ist $f_s = f$ und daher

$$f = -\frac{dV}{dn}. \tag{5'}$$

12. Flusslinien und Flussröhren. — *Flusslinie* nennt man eine Linie, in deren sämtlichen Punkten die Richtung des dort existierenden Vektors mit der Tangente der Linie zusammenfällt. Wenn der Vektor stetige Verteilung hat, so geht durch jeden Punkt eines Feldes eine, aber auch nur eine einzige Flusslinie.

Betrachten wir nun in dem Felde eines Vektors einen Punkt A (Fig. 10); Aa sei die Richtung des Vektors. Auf Aa nehmen wir einen unendlich nahe bei A gelegenen Punkt B; die Richtung, die in diesem Punkte der Vektor besitzt, sei Bb. In ähnlicher Weise sei C ein auf Bb genommener, unendlich nahe bei B liegender Punkt und Cc die Richtung des Vektors in demselben und so weiter. Die Polygonallinie $ABC\ldots$ hat als Limes eine gekrümmte Linie, deren Tangenten in jedem ihrer Punkte mit dem Vektor dieselbe Richtung haben; sie ist die Flusslinie, die durch den Punkt A geht.

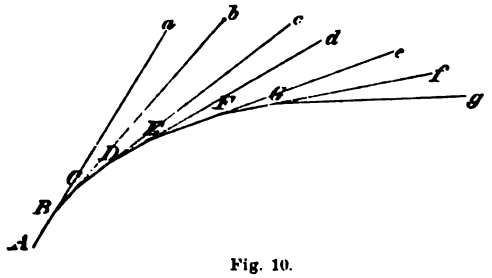


Fig. 10.

Der geometrische Ort der Flusslinien, die durch die Punkte einer geschlossenen Linie AB (Fig. 11) hindurchgehen, ist eine röhrenförmige Fläche $AB\,A'B'$. Den von dieser Fläche begrenzten geometrischen Körper nennt man *Flussröhre;* die Fläche selbst nennt man die *Fläche der Flussröhre.*

Weil der Vektor in jedem Punkte der Fläche einer Röhre wie die Tangente gerichtet ist, so ist der Fluss eines Vektors durch einen beliebigen Teil der Fläche einer Flussröhre gleich Null.

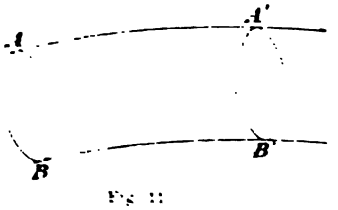


Fig. 11.

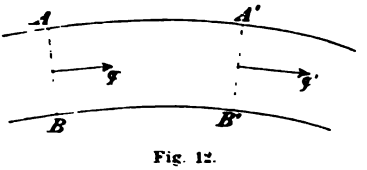


Fig. 12.

Betrachten wir in einem Felde mit solenoidischer Verteilung einen durch zwei beliebige Schnitte AB und $A'B'$ begrenzten Teil einer Flussröhre (Fig. 12). Die Fläche der Röhre und die beiden Schnitte bilden eine geschlossene Fläche, durch welche (der Solenoidität wegen) der austretende Fluss gleich Null ist. — Durch die Fläche der Röhre selbst

tritt nun kein Fluss aus; durch die Schnitte AB und $A'B'$ müssen daher zwei numerisch gleiche, mit entgegengesetzten Vorzeichen versehene Flüsse austreten.

Wenn einer davon aus dem Raume $ABA'B'$ austritt, so tritt der andere in den Raum ein; beide Flüsse haben also dieselbe Richtung. Nun sind aber die Schnitte AB und $A'B'$ beliebig gewählt, woraus wir schliessen, dass durch alle Schnitte der Röhre der Fluss denselben Wert hat und in derselben Richtung verläuft: *In einem Felde mit solenoidischer Verteilung ist der Fluss längs einer Flussröhre konstant.*

Dieser Satz entspricht dem sogenannten *Kontinuitätssatz* der Hydraulik.

Eine Folge dieser Eigenschaft ist, dass im Innern eines Raumes mit solenoidischer Verteilung keine Flussröhre Anfang oder Ende haben kann: keine Flusslinie kann in einem Teile des Feldes, wo dessen Verteilung solenoidisch ist, beginnen oder endigen. — Wenn das Feld den ganzen Raum einschliesst, und überall die Verteilung solenoidisch ist, so dehnen sich die Flusslinien bis ins Unendliche aus, oder sie sind geschlossene Linien. Ein Feld mit solenoidischer Verteilung kann in viele endliche oder unendlich kleine röhrenförmige Teile zerlegt werden, in welchen der Fluss des Vektors konstant ist, wie jener der Geschwindigkeit eines die Röhre füllenden und unveränderliches Volumen behaltenden Fluidums wäre. Diese Betrachtungen erklären uns auch die Wahl des Ausdrucks *solenoidisch*, welcher in Anlehnung an das griechische Hauptwort $\sigma\omega\lambda\dot{\eta}\nu$ = Röhre gebildet ist.

13. Änderung des Vektors längs einer unendlich dünnen Flussröhre. — Denken wir uns in einem Felde mit solenoidischer Verteilung eine unendlich dünne Flussröhre $ABA'B'$ (Fig. 13), und betrachten wir die hierzu senkrechten, sonst beliebigen Schnitte AB und $A'B'$, deren Flächen dS und dS' seien. Wenn wir mit f und f' die Werte des Vektors in den beiden Schnitten AB und $A'B'$ bezeichnen, so haben die Flüsse durch die beiden Schnitte die Werte $f\,dS$ und $f'\,dS'$, und, da diese gleich sind, so hat man:

$$f\,dS = f'\,dS', \quad \frac{f}{f'} = \frac{dS'}{dS};$$

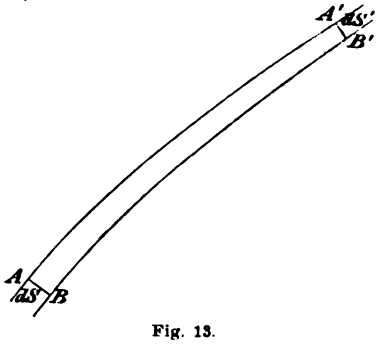


Fig. 13.

oder: längs einer unendlich dünnen Röhre variiert der Vektor umgekehrt proportional dem Querschnitte derselben. Wenn die Röhre sich verengt, sinkt der Vektor im Werte und umgekehrt. Wenn $dS = dS'$,

dieselben einander genügend nahe sind, damit die Stücke von Flusslinien, welche von zwei einander folgenden Äquipotentialflächen begrenzt sind, praktisch mit geradlinigen Strecken vertauscht werden können. Nennen wir Δn eines dieser Segmente und ΔV die konstante Differenz zwischen den Potentialen auf zwei benachbarten Niveauflächen. Der Quotient $\frac{\Delta V}{\Delta n}$ hat als Limes $\frac{dV}{dn}$ und stellt folglich, wenn, wie angenommen, Δn klein ist, einen angenäherten Wert von $\frac{dV}{dn}$ dar.

Nun ist aber $\frac{dV}{dn}$, abgesehen vom Vorzeichen, der Wert von f. Es reicht also aus, die in der Konstruktion des Modelles oder der Zeichnung gewählte konstante Differenz ΔV anzugeben, um in jedem Punkte des Feldes durch die einfache Messung einer Länge Δn den Wert von f bestimmen zu können.

Die Wahl der Niveauflächen, derart dass die Potentialdifferenz zwischen zwei benachbarten derselben konstant ist, dient nicht nur dazu, die für die Berechnung des Wertes f auf die beschriebene Weise notwendigen Angaben auf die alleinige Kenntnis der Grösse ΔV zu reduzieren, sondern auch dazu, aus dem Modelle auf den ersten Blick die Verteilung des Vektors im Felde erkennen zu lassen.

Und in der That, wenn ΔV konstant ist, sagt die angenäherte Gleichung

$$f = -\frac{\Delta V}{\Delta n},$$

dass f als umgekehrt proportional zu Δn angenommen werden kann; wo Δn klein ist, wo also die gezeichneten oder konstruierten Äquipotentialflächen einander nahe sind, hat der Vektor einen grossen Wert; wo Δn gross ist, wo also die Äquipotentialflächen weit auseinander sind, besitzt der Vektor einen kleinen Wert.

Setzen wir $\Delta V = 1$, so giebt uns der reciproke Wert des Abstandes Δn mit umgekehrtem Vorzeichen direkt den Tensor des Vektors.

b) *Darstellung des Feldes durch Flusslinien.* — Stellen wir uns das Feld in Einheitsröhren zerlegt vor, und denken wir uns dann, um sie bequem darstellen zu können, dass sie sich quer zusammenziehen. Denken wir uns sogar, dass diese Zusammenziehung so weit vor sich geht, bis die Einheitsröhren unendlich dünn werden, und jede derselben zu einer einfachen Flusslinie zusammenschrumpft, die als der Kern oder ein Abbild des Verlaufs der Einheitsröhre angesehen werden kann. Wir erhalten auf diese Weise, um die ursprünglichen Einheitsröhren darzustellen, lediglich ebenso viele Flusslinien. — Eine Zeichnung oder ein Modell,

worin diese Flusslinien dargestellt sind, giebt uns ebenfalls eine deutliche Veranschaulichung der Verteilung des Vektors in dem Felde.

Um die eben beschriebene Darstellung materiell auszuführen, kann man auf folgende Weise vorgehen. Man zieht in der Zeichnung oder im Modell eine Niveaufläche, und auf dieser verteilt man Punkte so, dass in jedem ihrer Teile die Anzahl derselben den durch den Flächenteil hindurchgehenden Fluss in dem gewählten Masssystem ausdrückt. Durch jeden der gezeichneten Punkte zieht man eine Flusslinie. Die eben ausgedrückte Bedingung, nach welcher die Punkte auf der bei der beschriebenen Operation gewählten Niveaufläche verteilt worden sind, muss wegen der solenoidischen Eigenschaft des Feldes auch für alle anderen Niveauflächen zutreffen.

Wenn ein so konstruiertes Modell oder eine so hergestellte Zeichnung gegeben ist, und man den Fluss durch irgend eine Fläche kennen will, so genügt es, die Flusslinien zu zählen, welche durch dieselbe innerhalb deren Begrenzung hindurchgehen.

Durch Division der Zahl der die betrachtete Fläche durchsetzenden Linien durch die Fläche selbst erhält man [8] den Mittelwert der Normalkomponenten des Vektors. Ist der Flächenteil genügend klein, sodass die Verteilung der Punkte auf demselben als gleichförmig angesehen werden kann, so ergiebt die genannte Division ohne Weiteres den Wert der Normalkomponenten. Wenn die Fläche eine Ebene ist und einer Niveaufläche angehört, hat man sofort den Vektor. Mit anderen Worten, es ist der Wert des Vektors durch die Zahl der Linien dargestellt, welche durch die auf einer Niveaufläche angenommenen Flächeneinheit hindurchgehen.

Auf diese Weise genügt die durch die Flusslinien gegebene Darstellung des Feldes zur Bestimmung des Vektors in jedem Punkte, nicht nur der Richtung, sondern auch der Grösse nach. Dort wo die Linien dichter bei einander sind, ist der Vektor grösser, dort wo sie weiter auseinander liegen, ist er kleiner. Wenn es auch nicht immer leicht ist, ein solches Modell oder Zeichnung, wie soeben beschrieben, zu konstruieren, so ist es doch immer möglich sich dieselben vorzustellen. Auf der Vorstellung des Feldes in der beschriebenen Weise beruhen häufig in der Sprache des Elektrotechnikers gebrauchte Ausdrücke. So spricht [illegible] von [illegible] *Fläche durchsetzen* und von [illegible] statt von *Fluss des Vektors durch die* [illegible] und von [illegible] zu sprechen.

15. Gleichförmiges Feld. Besondere Erwähnung verdient der Fall, [illegible] alle Flusslinien parallele Gerade sind. Man kann leicht er-

kennen, dass in einem solchen Felde der Vektor in allen Punkten denselben Wert hat. Nämlich: I. Alle Flussröhren haben konstanten Querschnitt, und deshalb hat der Vektor, nach dem im Abschnitte [13] bewiesenen Satze, in allen Punkten einer Flusslinie denselben Wert. — II. Die Äquipotentialflächen, welche zu den Flusslinien senkrecht verlaufen, sind in diesem Falle lauter parallele Ebenen. Deshalb ist der Abstand dn zwischen zwei Äquipotentialflächen, zwischen denen die Potentialdifferenz dV herrscht, derselbe für die ganze Ausdehnung dieser Flächen; folglich hat der Vektor [11] $-\frac{dV}{dn}$ in allen Punkten einer beliebigen Niveaufläche denselben Wert. Somit ist der Vektor in jedem Punkte des Feldes konstant. Ein solches Feld, wie das eben besprochene, wo der Vektor in allen Punkten denselben Wert und dieselbe Richtung hat, heisst *gleichförmig* oder *homogen*.

§ 2.

Kraftfelder.

17. Massen oder Mengen von Agens. — Unter allen Vektorgrössen hat der Vektor *Kraft* besondere Wichtigkeit. In der Physik hat man oft mit Teilen des Raumes zu thun, welche die Eigenschaft besitzen, dass man in sie nur gewisse Körper oder beliebige Körper unter bestimmten Bedingungen zu bringen braucht, damit auf sie Kräfte wirken. Ein Raum, der diese Eigenschaft besitzt, heisst ein *Kraftfeld*.

In einem solchen Kraftfelde variiert im allgemeinen die Kraft, die auf einen gegebenen Körper wirkt, von Punkt zu Punkt; für einen und denselben Punkt variiert sie, abgesehen von zeitlichen Änderungen, je nach der Natur oder den Dimensionen des in dem Punkte betrachteten Körpers.

Ein Kraftfeld kann den ganzen Raum einschliessen oder von bestimmten Flächen begrenzt sein.

Ein Beispiel eines unbegrenzten Kraftfeldes bietet uns das Feld der Schwerkraft. Wir können wahrnehmen, dass auf jeden beliebigen Körper, wo immer er sich auch in dem unseren Forschungen zugänglichen Raume befinde, ununterbrochen Kräfte einwirken. Dieser Raum ist also, unserer Definition nach, ein Kraftfeld. Die Stärke der Resultierenden der Kräfte, die in den Punkten des Körpers angreifen, hängt vom Körper selbst und ferner von dem Ort, wo er sich befindet, ab; es ist bekannt, dass die gegenseitige Vergleichung zwischen den Kräften, die an einem und demselben Orte auf verschiedene Körper wirken, dazu dient, die Massen

dieser Körper untereinander zu vergleichen, während dagegen die V
gleichung zwischen den Kräften, die auf einen und denselben Körper
verschiedenen Orten wirken, dazu dient, den Wert der Schwerkraft o
das Gewicht des Körpers an verschiedenen Punkten zu bestimmen, d.
die verschiedenen Punkte des Feldes unter sich zu vergleichen.

Die Schwerkraft wirkt auf alle Körper; es giebt aber Kraftfeld
in denen nur auf einige Körper, oder auf Körper in gewissen Zuständ
Einwirkungen stattfinden. Um auszudrücken, dass ein Körper in ein
solchen Kraftfelde sich befinde und den in ihm wirksamen Kräften unt
liege, können wir sagen, jener Körper besitzt ein *Agens*. Damit brauch
wir auf keine Hypothese über die innere Natur der eben erwähnten
sondern Zustände einzugehen, ebenso wie wir keine Hypothese über
Natur der Wärme aufstellen, wenn wir sagen, dass ein Körper warm i

Aber auch ohne zu wissen, worin ein Agens besteht, und ohne üb
seine Natur eine Hypothese aufzustellen, können wir das Agens als ei
messbare Grösse behandeln und in Zahlen ausdrücken. Wir können
den Satz: Mengen von Agens miteinander vergleichen. Man stelle si
einen kleinen Körper vor, einen materiellen Punkt, welcher, in das
Gegebene Kraftfeld gebracht, dort der Wirkung einer Kraft ausgesetzt i
Wie das Vorhandensein dieser Kraft uns nach dem getroffenen Überei
kommen zu sagen berechtigt, der materielle Punkt besitze Agens, so ka
die messbare Stärke der Kraft dazu dienen, die *Menge* oder die *Mas*
des Agens selbst zu bestimmen. Wenn zwei nach einander an einen u
denselben Ort des Feldes gebrachte materielle Punkte dort der Stärk
und Richtung nach gleichen Kräften ausgesetzt sind, so sagen wir, dass s
gleiche Mengen oder *gleiche Massen* von Agens enthalten; wenn in ihn
ungleiche Kräfte angreifen, so sagen wir, dass sie ungleiche Massen er
halten, und zwar, wenn sich die beiden Kräfte wie $m:n$ verhalten, da
sich die in den Körpern enthaltenen Massen in demselben Verhältnisse stehe

Was haben wir, wenn wir die Werte der Massen des betrachtet
Körpers durch Zahlen ausdrücken wollen, nichts anderes zu thun, als ei
bestimmte, d. h. ohne vollkommen bestimmte Masse, zu wählen und ihr
Wert mit der Zahl *Eins* zu bezeichnen. Um ferner die *Verteilung d*
Kraft in Felde zu prüfen, genügt es, an die verschiedenen Orte imm
denselben Körper zu bringen und die in ihm angreifenden Kräfte mi
einander zu vergleichen. Wir wollen mit *Prüfmasse* die Masse bezeichne
welche zu diesem Behufe verwendet, um die Verteilung der Kräfte in demselb
Felde zu prüfen. Wenn nun als Prüfmasse jene Masse von Agens wähl
worden ist, welche als Einheit angenommen wurde, so bezeichnet man die Richtun
und Stärke der Kraft, welche auf sie einwirkt, als die *Richtung* un
Stärke des Feldes in dem betrachteten Punkte. Die Stärke des Feld

in einem Punkte nennt man auch den *Wert der Kraft* oder einfach die *Kraft* in dem Punkte.

Wenn f die Stärke des Feldes in einem Punkte ist und auf einen kleinen, in diesem Punkte befindlichen Körper in der Richtung des Feldes eine Kraft von der Stärke mf angreift, so besitzt, nach der angegebenen Definition der Masse, der kleine Körper eine Masse m von dem betreffenden Agens. Es kann vorkommen, dass der kleine Körper nicht in der Richtung des Feldes, sondern in der entgegengesetzten einen Antrieb erfährt, man sagt dann, er enthält eine *negative* Masse. Diese beiden betrachteten Fälle sind die einzigen, die in den vorhandenen Kraftfeldern vorkommen können. Eine beliebige Masse kann in der Richtung des Feldes oder in der derselben entgegengesetzten, aber nie in anderen Richtungen von den Kräften des Feldes angegriffen werden.

18. Potential. Arbeit. — Alle für die Vektorfelder besprochenen Begriffe können auch auf die Kraftfelder angewandt werden. Es ist also nicht nötig, für diesen speziellen Fall die Begriffe: *Kraftfluss durch eine Fläche, Kraftintegral längs einer Linie, Niveaufläche, Kraftlinie und -röhre, solenoidische Verteilung, Potential* u. s. w. eigens zu definieren. Bei den Kraftfeldern erhält das Potential eine hervorragende physikalische Bedeutung. Das Potential V in einem Punkte M des Feldes (Fig. 14) ist das Integral des Vektors längs irgend einer Linie, die diesen Punkt M mit einem im Felde als festliegend angesehenen Punkt C verbindet:

$$V = \int_{MC} f_s ds.$$

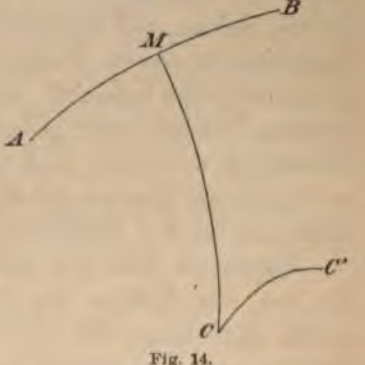


Fig. 14.

Wenn nun der Vektor f eine Kraft ist, so stellt das Produkt $f_s ds$ die *Arbeit* dar, welche von jener Kraft geleistet wird, wenn die Einheitsmasse die Verschiebung ds erleidet; das Integral $\int_{MC} f_s ds$, d. h. das Potential, stellt dann die gesamte Arbeit dar, die die Kraft leistet, wenn die Einheitsmasse die Linie MC durchläuft, die im Punkte M beginnt und im festen Punkte C endigt.

Betrachtet man eine beliebige Linie zwischen den Punkten A und B, so hat man

$$V_A - V_B = \int_{AB} f_s ds,$$

und daher ist die Potentialdifferenz zwischen zwei Punkten A und B die Arbeit, welche die Kraft leistet, während die Einheitsmasse unter der Wirkung dieser Kraft einen beliebigen Weg vom Punkte A zum Punkte B zurücklegt.

Wenn anstatt der Einheitsmasse eine Masse m bewegt wird, ist die auf sie wirkende Kraft mf, also ist die geleistete Arbeit, wenn die Masse m von A nach B verschoben wird,

$$m \int_{AB} f_s ds = m (V_A - V_B).$$

Die Arbeit, welche die Kraft leistet, während die Masse m sich vom Punkte A zu einem anderen Punkte B verschiebt, ist das Produkt aus der Masse und der Potentialdifferenz zwischen den beiden Punkten. Deshalb giebt, wenn man die geleistete Arbeit und die bewegte Masse kennt, ihr Verhältnis die Potentialdifferenz zwischen den Punkten, zwischen welchen die Verschiebung stattgefunden hat.

Das Potential ist bis auf eine Konstante definiert, welche von der Wahl des willkürlichen festen Punktes C abhängt. Indem man den Punkt C variiert und ihn z. B. nach C' bringt, variiert das Potential in allen Punkten um eine konstante Grösse, welche die Arbeit längs der Linie CC' darstellt. Unter den unendlich vielen Punkten C wird man immer den Punkt wählen können, für den die Integrationskonstante ein Maximum wird, d. h. für den das Potential bei den gegebenen Feldbedingungen seinen höchsten Wert hat. Bei dieser Wahl stellt das Potential in einem Punkte die grösste Arbeit dar, welche die Kraft leisten kann, während die Masse *Eins* im Felde von diesem Punkte aus bewegt wird, d. h. die Arbeit, welche man lediglich dadurch zur Verfügung hat, dass die Masse *Eins* sich in diesem Punkte befindet; es stellt daher eine *Energie der Lage* oder eine *potentielle Energie* dar. In den Kraftfeldern ist die Benennung Potential sehr geeignet für dessen physikalische Bedeutung; jene Benennung wird aber auch in umfassenderem Sinne gebraucht, und sie wird, wie wir gesehen haben, ganz allgemein bei den Vektorfeldern und nicht nur bei den Kraftfeldern angewandt.

Betrachtet man eine beliebige Linie zwischen zwei Punkten, so ist die von den Kräften des Feldes geleistete Arbeit, während sich die Masse *Eins* längs der Linie verschiebt, gleich der Verminderung der Energie, oder, was dasselbe bedeutet, gleich der Potentialdifferenz zwischen den Endpunkten.

Wenn die bewegliche Einheitsmasse eine geschlossene Linie durchläuft, indem sie zu dem ursprünglichen Punkte zurückkommt und die gesamte in der durchlaufenen Strecke geleistete Arbeit Null ist, findet man, zum Ausgangspunkt zurückgekehrt, dasselbe Potential, das im An-

fang in diesem Punkte vorhanden war; wenn dagegen eine gewisse Arbeit gewonnen oder verzehrt wird, findet man bei der Rückkunft zu dem Punkte in demselben ein anderes Potential, als man beim Beginn der Bewegung hatte; die Differenz zwischen beiden Werten gleicht der positiven oder negativen, längs der durchlaufenen Linie verrichteten Arbeit. Im ersten Falle ist das Potential eine einwertige oder *monodrome*, im zweiten Falle eine mehrwertige oder *polydrome* Funktion.

Wenn im Felde geschlossene Kraftlinien vorkommen, so ist das Potential sicher polydrom, denn die Arbeit längs einer Kraftlinie kann nicht Null sein, da die Kraft beständig die gleiche Richtung wie die Bewegung hat. Physikalisch aber kann man, wenn man eine solche geschlossene Linie vor sich hat, erlangen, dass die Masse sich längs der Linie unendlich lange fortbewegt, während sie fortgesetzt Arbeit leistet. Damit dies möglich ist, ist es nach dem Prinzip von der Erhaltung der Energie nötig, dass im Felde Arbeit verrichtet wird. Es folgt daraus, dass es in einem nur durch statische Zustände bedingten Felde keine geschlossenen Kraftlinien geben kann und das Potential in einem solchen Felde eine monodrome Funktion ist, während in einem durch Verrichtung von Arbeit in seinem Bestande aufrechterhaltenen Felde das Potential eine polydrome Funktion sein kann.

§ 3.

Newton'sche Kraftfelder.

19. Newton'sche Kräfte. — Ein besonders wichtiger Fall, auf den wir die erworbenen Kenntnisse anwenden wollen, ist der der *Newton'schen Kräfte*. Diesen Namen erteilt man den Kräften, deren Richtung bestimmt ist durch die gerade Verbindungslinie der materiellen Punkte, zwischen welchen die Kräfte wirken, und deren Intensität umgekehrt proportional dem Quadrate der Entfernung zwischen diesen Punkten ist.*) Newton'sche Kräfte sind u. a. diejenigen, welche, von der allgemeinen Gravitation bedingt, unter den Himmelskörpern wirken. Zur Erklärung der Bewegungen dieser Körper wurde von Newton zuerst das nach ihm benannte Kraftgesetz, das die soeben ausgesprochenen Bedingungen enthält, aufgestellt.

Was uns die Erfahrung unmittelbar lehrt, ist die Existenz der Anziehung oder Abstossung zwischen gewissen materiellen Punkten und die

*) Newton gab zuerst eine umfassende mathematische Theorie der Bewegungen der Himmelskörper unter Zugrundelegung einer zwischen ihnen wirkenden Kraft von den oben bezeichneten Eigenschaften. Man kann daher mit Recht derartige Kräfte ebenso nennend nach seinem Namen bezeichnen.

Beziehung zwischen den Kraftintensitäten und den Entfernung
Punkte; aber die einfachen Betrachtungen, welche die Existe
Kräfte nachweisen, genügen nicht, um die Ursache, welche si
vorbringt, und auch nicht den Sitz dieser Ursache entdecken
Doch für die rein mathematische Behandlung der Newton'sc
felder ist es nicht nötig, auf die Betrachtung der Ursachen zurü
deren Vorhandensein die Kräfte selbst ihre Entstehung verda
schadet der Strenge oder der Allgemeinheit der Schlussfolge
man für die Newton'schen Kräfte den Begriff *Agens* her
und denken, dass diese Kräfte von Massen oder Meng
herrühren, welche in den Punkten enthalten sind, zwisc
Kräfte wirken.

Betrachten wir zwei in der Entfernung r von e
materielle Punkte M und M', zwischen welchen ei
Kraft wirkt. Der Definition nach ist eine solche Kra
man weiss ferner, dass die von M auf M' wirkende K
Richtung nach entgegengesetzt der Kraft ist, die vo
Wir betrachten nun den materiellen Punkt M wie
in dem von M' herrührenden Kraftfelde gelegen ist.
Felde gelegene Punkt M von einer Kraft angegr
wir sagen [17], dass M ein Agens enthält, und d
besitzt, welche proportional der Kraftintensität
ähnlicher Weise den Punkt M' wie einen P
Punkte M herrührenden Felde gelegen ist, so
dass er, weil auf ihn eine Kraft wirkt, eine Ma
und dass diese proportional der Kraft ist. Es ist
$\frac{1}{r^2}$ und den Massen m und m', welche in den
sind. Wenn also F die Stärke der Kraft
stanten Proportionalitätsfaktor darstellt, de
Masseinheiten und von der Natur des zwi
Mediums abhängt, so haben wir:

$$F = k\frac{mm'}{r^2}. \tag{6}$$

Da für die Kräfte, die bei dem M
vorkommen, diese Beziehung experimentel
ist, so heisst sie für diese Gebiete der

Setzen wir voraus, die Identität
Falle experimentell untersucht
der Kräfte konstatiert,

nacheinander in einen und denselben Punkt eines gegebenen Feldes gebracht werden. Die Coulomb'sche Formel giebt dann:

$$F = k\frac{m^2}{r^2}.$$

Wenn, wie es nahe liegt, der Konstanten k ein positiver Wert zugeschrieben wird, ergiebt sich die Kraft F positiv. Wir müssen daher als *positive Kraft* eine anziehende betrachten, wenn die Erfahrung lehrt, dass zwei gleiche Massen sich anziehen, und eine abstossende, wenn die Erfahrung angiebt, dass zwei gleiche Massen sich abstossen. Im Falle der Schwere muss man als positive Kraft eine anziehende, in den Fällen dagegen, die Gegenstand unseres Studiums sind, werden wir als positive Kraft eine abstossende betrachten. Dies werden wir von jetzt an thun und annehmen, dass zwei Massen m und m' gleiches oder entgegengesetztes Vorzeichen besitzen, je nachdem sie sich abstossen oder anziehen.

20. Potential in den Newton'schen Kraftfeldern. — Es sei der die Masse *Eins* enthaltende materielle Punkt M (Fig. 15) in einem Kraftfelde gelegen, das von einer Masse m hervorgebracht wird, welche in einem um $Mm = r$ entfernten Punkte m konzentriert ist. Auf jenen materiellen Punkt wirkt eine Kraft

$$k\frac{m}{r^2}.$$

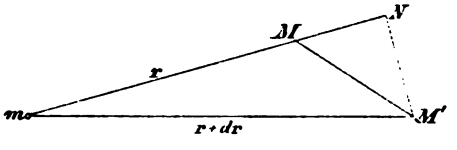


Fig. 15.

Wenn unter der Wirkung einer solchen Kraft der Punkt M sich um eine unendlich kleine Strecke verschiebt und nach dem Punkte M' gelangt, der sich in der Entfernung $mM' = r + dr$ von der Masse m befindet, so leistet die Kraft eine Arbeit

$$k\frac{m}{r^2} \cdot MN,$$

wobei MN die Projektion von MM' auf die Gerade mM ist. Wenn aber MM' unendlich klein ist, wie wir vorausgesetzt haben, so fällt die Senkrechte $M'N$ auf mM mit dem Bogenstück eines Kreises, dessen Mittelpunkt m ist, zusammen; man hat daher $MN = mM' - mM = dr$ und für den Ausdruck der Arbeit

$$km\frac{dr}{r^2}$$

d. h., wenn c eine willkürliche Konstante ist,

$$-d\left(k\frac{m}{r} + c\right).$$

Wenn man anstatt eines von einer einfachen Masse m herrührenden Feldes ein solches hat, welches von einer beliebigen Anzahl von in ebensovielen Punkten gelegenen Massen herrührt, so leistet die Resultante der Kräfte, die diese Massen auf den materiellen Punkt M ausüben, während dieser sich von M nach M' verschiebt, eine Arbeit, welche gleich der Summe mehrerer Arbeiten ist, deren jede durch die vorher ermittelte Formel ausgedrückt wird. Für den Wert dieser Summe kann man schreiben

$$-d\left(k\sum\frac{m}{r}+C\right),$$

worin C eine willkürliche Konstante ist. Die einer unendlich kleinen Verschiebung des materiellen Punktes M entsprechende Arbeit ist also durch das vollständige Differential einer Funktion der Koordinaten des beweglichen Punktes ausgedrückt, oder anders gesagt, *die im Felde vorhandenen Kräfte besitzen ein Potential.*

Bezeichnen wir mit V das Potential, so wird die der unendlich kleinen Verschiebung des Punktes M entsprechende Arbeit durch $-dV$ ausgedrückt; und wenn wir diesen Ausdruck mit dem für dieselbe Arbeit eben ermittelten vergleichen, sehen wir, dass

$$V=k\sum\frac{m}{r}+C. \tag{7}$$

Nach der Wahl eines bestimmten Wertes für die willkürliche Konstante C hat dieses Potential für jeden Punkt des Raumes einen einzigen Wert.

Infolgedessen ist die Arbeit $V_A - V_B$, welche die Kräfte des Feldes leisten, wenn der bewegliche materielle Punkt sich vom Punkte A zu einem anderen Punkte B verschiebt, unabhängig von der Bahn des beweglichen Punktes und hängt nur von der Lage des Anfangspunktes A und des Endpunktes B ab. Wenn der bewegliche Punkt eine geschlossene Linie durchläuft und zu dem Anfangspunkte zurückkehrt, so ist die Arbeit gleich Null. In den Newton'schen Kraftfeldern können wir keine geschlossenen Kraftlinien treffen.

21. Energie. — Das Potential V in einem Punkte M des Feldes stellt [18], abgesehen von einer Konstanten, die Energiemenge dar, die durch das Vorhandensein der Masse *Eins* in dem betr. Punkte disponibel wird.

Wenn man im Punkte M anstatt der bis jetzt betrachteten Masse *Eins* eine andere beliebige Masse m' hat, so ist die zur Verfügung stehende Energie, wenn der bewegliche Punkt M sich im Kraftfelde in einem Punkte, wo das Potential V herrscht, befindet, durch das Produkt

$$m'V$$

gegeben.

Bei diesen Betrachtungen haben wir vorausgesetzt, dass die Massen m, das Feld erzeugen, fest im Raume seien, und dass die im Felde gliche Masse m' auf die Stärke desselben keinen Einfluss ausübe. legen wir uns eine allgemeinere Frage vor. Gegeben ist ein beliebiges em von materiellen Punkten, welche die Massen m, m_1, m_2, m_3, $\cdots$ alten; alle diese Punkte oder einige derselben sind beweglich. Wie kt sich nun die gesamte von den Kräften geleistete Arbeit aus, welche r unendlich kleinen Veränderung des Systems d. h. einer unendlich nen Verschiebung der Massen m, m_1, m_2, m_3, $\cdots$ entspricht? Um diese ge zu beantworten, genügt es, zu bemerken, dass die Kraft zwischen i der gegebenen Massen, z. B. zwischen m und m_1, die Arbeit

$$k\frac{mm_1}{r^2}\,dr \quad \text{oder} \quad -d\left(k\frac{mm_1}{r}+c\right)$$

et, und dass folglich die gesamte Arbeit

$$-d\left(\sum k\frac{mm_1}{r}+C\right)$$

wobei C eine willkürliche Integrationskonstante und das Zeichen $\sum$ Summe darstellt, welche auf alle Kombinationen von je zwei Gliedern edehnt ist, die man mit den Punkten des Systems bilden kann.

Wenn wir auch hier den Begriff Energie einführen, können wir n, dass die Energie des Systemes

$$W=\sum k\frac{mm_1}{r}+C$$

Um die in diesem Ausdruck vorkommende Summe zu bilden, können wir it beginnen, dass wir die den Kombinationen einer der Masse, z. B. m, jeder der anderen entsprechenden Posten summieren; wir bekommen ie partielle Summe

$$m\cdot k\sum\frac{m'}{r},$$

n durch m' eine beliebige Masse, die Masse m ausgeschlossen, dargestellt

Aber $k\sum\frac{m'}{r}$ ist, abgesehen von einer willkürlichen Konstanten, das ntial des Systemes in dem Punkte, in welchem die Masse m gelegen die partielle Summe ist also mV. Auf dieselbe Weise geben die ibinationen einer anderen Masse, z. B. der Masse m_1, mit jeder der eren eine partielle Summe m_1V_1, wobei V_1 den Wert des Potentials lem Punkte, in welchem die Masse m_1 gelegen ist, darstellt. Analoge ultate geben die partiellen Summen, die den anderen Massen m_2, m_3, $\cdots$ sprechen. Durch Addition aller partiellen Summen erhält man

$$\sum mV,$$

Wenn man anstatt eines von einer einfachen Feldes ein solches hat, welches von einer beliebigen vielen Punkten gelegenen Massen herrührt, so lei Kräfte, die diese Massen auf den materiellen Punk dieser sich von M nach M' verschiebt, eine Ar Summe mehrerer Arbeiten ist, deren jede durc Formel ausgedrückt wird. Für den Wert dieser Su

$$-d\left(k\sum_r^m + C\right),$$

worin C eine willkürliche Konstante ist. Die ei schiebung des materiellen Punktes M entsprec das vollständige Differential einer Funktion weglichen Punktes ausgedrückt, oder anders *denen Kräfte besitzen ein Potential.*

Bezeichnen wir mit V das Potential, kleinen Verschiebung des Punktes M entsp ausgedrückt; und wenn wir diesen Ausdruc eben ermittelten vergleichen, sehen wir, d

$$V = k\sum_r^m \quad (7)$$

Nach der Wahl eines bestimmten stante C hat dieses Potential für jed zigen Wert.

Infolgedessen ist die Arbeit V_1 leisten, wenn der bewegliche materi einem anderen Punkte B verschiebt weglichen Punktes und hängt nur und des Endpunktes B ab. Wenn d Linie durchläuft und zu dem Anfan gleich Null. In den Newton'sch schlossenen Kraftlinien treffen.

21. Energie. Das Poten stellt [18], abgesehen von einer durch das Vorhandensein der nibel wird.

Wenn man im Punkte M V eine andere beliebige stehende Energie, wenn di einem Punkte, wo das Pot

gegeben

Zweites Kapitel.

Elektrizität.

§ 1.

Elektrischer Gleichgewichtszustand.

24. Elektrisierung durch Reibung. — Wenn man einen Siegellackstab mit einem Flanelltuch oder besser mit einem Stück Katzenfell reibt und ihn dann einem Tische nähert, auf welchem sich leichte Körperchen, wie Papierschnitzel, Federbart und dergl. befinden, so geraten diese in Bewegung, stellen sich auf eine Spitze oder springen vom Tische ab und berühren den Siegellackstab, welchem sie für einen Augenblick anhaften; dann reissen sie sich plötzlich los und fallen wieder ab, um aufs Neue sich zu erheben, sich anzuhängen, wieder abzufallen und so fort.

Dies beweist, dass in dem Raume zwischen Tisch und Siegellackstab Kräfte existieren, durch deren Wirkung die leichten Körper in Bewegung gesetzt werden; dieser Raum hat also eine neue Eigenschaft bekommen, die er zuvor nicht besass.

Man erzielt dieselbe Wirkung, wenn man statt des Siegellackstabes Stäbe aus Glas, Schwefel, Ebonit, Bernstein, Harz oder ähnlichen Substanzen reibt. Aus dem altgriechischen Namen für Bernstein, ἤλεκτρον, dessen Eigenschaft, leichte Körper anzuziehen, schon den Alten bekannt war, ist die Bezeichnung *Elektrizität* und *elektrische Erscheinungen* abgeleitet, welche den eben erwähnten und vielen anderen mit diesen zusammenhängenden Erscheinungen gegeben wird.

Der eben beschriebene Vorgang erweist sich als für die einleitende Betrachtung der elektrischen Erscheinungen nicht einfach genug, weil sich die verschiedenen Teile des geriebenen Stabes in verschiedenen Umständen befinden. Um grössere Einfachheit zu erlangen, wird es zweckmässig sein, den Versuch anders anzuordnen.

Auf einem Tische seien zwei metallische Platten zu einander parallel [illegible] in metallischer Verbindung mit [illegible] mit abgerundeter Kante [illegible] gehalten oder von Seidenschnüren [illegible] eine Ebonitscheibe *D* [illegible] zwischen *A* und *B* die-

Satze kann man folgenden analytischen Ausdruck geben:
trachte ein verschwindend kleines Prisma, dessen Seiten dx, dy und dz
rei Koordinatenachsen sind, und denke sich, dass in ihm die Dichte des
. Die in dem Prisma enthaltene Masse ist in diesem Falle $\varrho\, dx\, dy\, dz$
nach dem bewiesenen Satze, der aus demselben austretende Fluss

$$4\pi k \varrho\, dx\, dy\, dz.$$

nselben Fluss hat man aber bereits [6] den Ausdruck gefunden

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial z}\right) dx\, dy\, dz$$

erhält man, indem man die beiden Werte gleich setzt:

$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = 4\pi k \varrho.^*)$$

man V das Potential in einem Punkte des unendlich kleinen Prismas,
aus der Formel (5)

$$X = -\frac{\partial V}{\partial x} \qquad Y = -\frac{\partial V}{\partial y} \qquad Z = -\frac{\partial V}{\partial z}.$$

man diese Werte in die vorige Gleichung einsetzt, so erhält man

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -4\pi k \varrho.^*)$$

Beziehung verdanken wir Poisson.
die Verteilung solenoidisch ist, d. h. wenn innerhalb des betrachteten
eine Masse von Agens ist, so ist $\varrho = 0$ und folglich

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0.$$

st die Gleichung von Laplace, welche die solenoidische Bedingung

len Beziehungen (1) und (11) geht hervor, wie bis auf einen
Faktor $4\pi k$ die Divergenz des Vektors Kraft die Dichte des
stellt; dadurch wird eben hervorgehoben, dass, wenn man nach
alten Gewohnheit, die Erscheinungen zu betrachten, stammenden
e immer von Masse von Agens wie von etwas in dem Körper
xistierendem spricht, der Begriff Masse ebenso wie der Begriff
in unsern Betrachtungen thatsächlich rein mathematisch ist und
othese über die Natur des Feldes und über die Ursachen, die
ringen, bedingt. Wenn man sagt, dass in einem Punkte des
e Masse von Agens konzentriert ist, so will man nicht damit
, dass in dem Punkte thatsächlich etwas existiert, sondern nur,
n die Divergenz des Vektors Kraft nicht Null ist.

ersten Glieder der Gleichungen (11) und (12) werden gewöhnlich bezw.
d $\Delta_2 V$ bezeichnet.

Wir können die Sätze von Stokes und[illegible] es notwendig, wie folgt ausdrücken:

Der gesamte aus einer beliebigen, geschl[illegible] Kraftfelde gelegenen Fläche austretende Fl[illegible] Konstanten $4\pi k$ mal der algebraischen Su[illegible] eingeschlossenen Massen und ist unabhängig[illegible] der Fläche selbst liegen.

Nachstehende Sätze sind Folgerung[illegible]

In einer Kraftröhre nimmt der Flu[illegible] wo keine Massen von Agens existieren einem Schnitte der Röhre zu einem an[illegible] dadurch eine Region passiert, in welch[illegible]

Sind zwei Flächen S und S' v[illegible] (Fig. 19) umgeben, so haben die Kra[illegible] denselben Wert dem von S [illegible] keine Masse gegen in dies sind die beid verschieden.

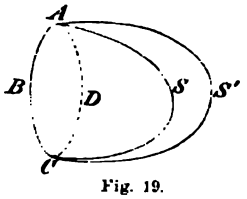


Fig. 19.

Wenn durch ges[illegible] einschliesst, welche Massen enth[illegible] halb dieser Flächen die solenoi[illegible] innerhalb der Flächen genügen tretende Fluss ist anstatt Null [illegible] eingeschlossene Masse darstellt; in Punkten, in welchen eine [illegible] Unendlichen.

23. Dichte des Agens.

Wenn v das Volumen eines [illegible] pflegt man unter *mittlerer Dicht[illegible]* $\frac{m}{v}$ zu verstehen. Wenn das heisst dieses Verhältnis *Dicht[illegible]*

Wenn man mit ϱ die mi[illegible] bezeichnet, so hat man in die [illegible] des von v austretenden Kraf[illegible]

[illegible] durch Glasstützen [illegible] elektrisieren [illegible] muss der Kon[illegible] verhindert wird, [illegible] des Experimen[illegible]

[illegible] zwei gleiche, metal[illegible] A bringe man eine [illegible] D, berühre A [illegible] A' [illegible] A weiter zu berühren, [illegible] sie darauf. Die [illegible] aber in verschiedener [illegible] Pendels (kleine [illegible] konstatieren, dass [illegible] anzuziehen und [illegible] Berührung gekommen [illegible] von einer Platte ab[illegible] wird. Die beiden [illegible] von verschiedener [illegible] Elektrizität; [illegible] sind. [illegible] Platte A bleibt, [illegible] erstere mit einem [illegible] wurde sie auch [illegible] ist, die eine [illegible] durch Reiben mit Seide [illegible] in der Platte A' [illegible] legt; sie

...ktrisierung durch Influenz. — In einem Körper zeigt sich ... auch einfach dadurch, dass man ihm einen anderen, elektri... nähert. Wenn wir einem isolierten, mit Elektrizität (z. B. ...) geladenen Konduktor A (Fig. 22) einen ebenfalls isolierten ... B nähern, so ladet sich ... und zwar mit gleichnami... Elektrizität in den ...ferneren Teilen und mit ...setzter, negativer Elek... den A näher gelegenen ... kann man leicht mittels ...ndermarkkugel erkennen.

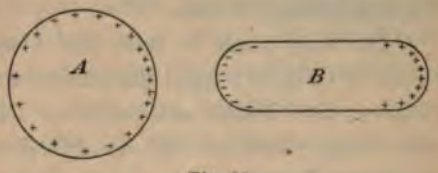


Fig. 22.

... man B entfernt oder A entladet, so verschwinden in B die ...ektrizitätsarten.

... B (Fig. 23) nicht mehr isoliert, sondern mit der Erde ver... tritt wieder die eben betrachtete Erscheinung auf, aber die ...ige Elektrizität, welche bei dem vorbeschriebenen Versuche an ... entfernten Ende des Konduktors B zum Vorschein gekommen ... dort verblieb, ...ich zur Erde, ... behält somit ...entgegengesetzte ... dem A nahe ... Ende von B. ...e Ladung ver... wenn man A ... oder entladet. ...n jedoch, bevor

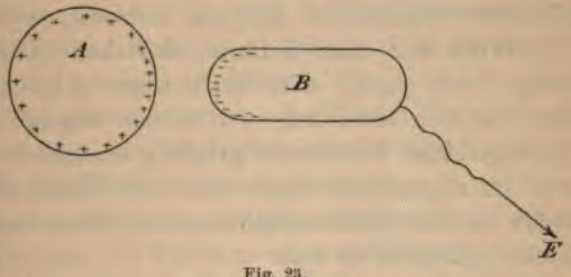


Fig. 23.

...ntfernt oder entladet, B isoliert, d. h. die bisher bestehende ...ng mit der Erde aufhebt, so verbleibt die entgegengesetzte ...ät in B; diese Ladung, die vorher hauptsächlich in dem A nahe ... Teil von B konzentriert war, verteilt sich jetzt auf den ganzen ...r B nach einem nur von der Form desselben abhängigen Gesetz. ...Erscheinungen giebt man den Namen *Influenz* oder *elektrostatische* ...

... fast allen elektrostatischen Versuchen hat man es mit Influenz... ...ungen zu thun. So können wir, wenn wir den im Abschnitte [24] ...n Versuch näher prüfen, beobachten, dass die negativ elektrische ...ibe D (Fig. 20) durch Influenz die Platte A elektrisiert, welche ... positiver Elektrizität im oberen und mit negativer Elektrizität ...ren Teile ladet. Die Elektrizität auf D und die nahe gelegene,

entgegengesetzte auf der oberen Seite von A heben sich in ihrer Wirkun gegenseitig auf; folglich zeigt sich nur die negative Elektrizität auf d unteren Seite von A, welche ihrerseits durch Influenz auf die Platte wirkt und dieselbe positiv ladet. Solche Ladungen sind es auch, d sich negativ auf A, positiv auf B zeigen und durch Influenz auf d Papierschnitzel wirken.

So wird auch in dem im Absatze [26] erwähnten Experiment d Platte A (Fig. 21) durch Induktion von der negativ elektrisierten Scheibe geladen, und bleibt mit positiver Elektrizität geladen, wenn man sie m dem Finger berührt und die Scheibe D entfernt. Auf der Platte A' d gegen, auf welcher man die Scheibe D lässt, zeigt sich nur auf d unteren Seite induzierte, negative Elektrizität.

28. Elektrische Anziehung und Abstossung. — Bei dem im A schnitte [26] erwähnten Versuche sind die beiden Platten A und A' g laden, die eine mit positiver, die andere mit negativer Elektrizität; w haben daher ein einfaches Mittel, nur positiv oder nur negativ geladen Körper zu erhalten, indem wir sie in Berührung mit der Scheibe A od mit der Scheibe A' bringen, und können auf diese Weise die Wirkunge die unter elektrisierten Körpern auftreten, studieren.

Wenn wir zwei isolierte, elektrische Pendelchen gleichnamig, en weder beide positiv oder beide negativ, laden, werden wir beobachte dass sie sich abstossen; wir werden dagegen sehen, dass zwei mit en gegengesetzter Elektrizität geladene Pendelchen sich anziehen. Man kan also im allgemeinen sagen, dass zwei elektrisierte Körper sich abstosse wenn sie mit gleichnamiger, sich anziehen, wenn sie mit ungleichnamig Elektrizität geladen sind.

Wenn wir endlich einem isolierten und beliebig elektrisierten Pend chen einen nicht isolierten Konduktor nähern, werden wir zwische beiden Körpern eine Anziehung bemerken, welche daher kommt, dass dem nicht isolierten Körper durch Influenz entgegengesetzte Elektrizit auftritt.

Durch Influenz elektrisiert sich ein Körper einfach dadurch, dass in die Nähe eines elektrisierten Körpers gebracht wird. Immer, wenn m von elektrischen Wirkungen hervorgebrachte anziehende oder abstossend Kräfte konstatiert, sind beide Körper, unter welchen die Kräfte wirke elektrisiert. Es ist daher natürlich, die Kräfte, die unter den Körpe wirken, den elektrischen Massen zuzuschreiben, welche in den Körpe enthalten sind. Man wird folglich allgemein sagen:

Gleichnamige elektrische Massen stossen sich ab, ungleichnamige zie sich an.

29. Elektrisches Feld. — Aus den einfachen experimentellen Thatsachen, die wir erwähnt haben, können wir keine Schlussfolgerung über die Natur der elektrischen Erscheinungen ziehen; aber wir werden, ohne uns vorläufig um die Erforschung der Ursache zu kümmern, die solche Erscheinungen hervorbringt, die elektrischen Felder in allen ihren Erscheinungen vollkommen studieren können, indem wir auf dieselben alle die Gesetze anwenden, welche wir in allgemeiner Weise für die Kraftfelder aufgestellt haben, indem wir nämlich das Agens *Elektrizität* wie ein beliebiges Agens behandeln. Es wird hierbei nützlich sein, wenn wir nicht beliebig ausgedehnte Körper, sondern so kleine Körper betrachten, dass sie, wenn sie einander nicht zu nahe sind, in ihrem gegenseitigen Verhalten als materielle Punkte betrachtet werden können.

Wir werden indessen auf die elektrischen Felder die im Abschnitte [17] getroffenen Übereinkünfte ausdehnen. Wir werden sagen, dass zwei materielle Punkte gleiche *Elektrizitätsmengen* oder gleiche *elektrische Massen* enthalten, wenn sie, nach einander in einen und denselben Punkt des Feldes gebracht, von der Stärke und Richtung nach gleichen Kräften angegriffen werden, und dass die zwei Punkte ungleiche elektrische Massen enthalten, wenn auf sie dort ungleiche Kräfte wirken; bestimmter ausgedrückt, werden wir sagen, dass die in den Punkten konzentrierten Massen sich wie $m : n$ verhalten, wenn die beiden auf sie wirkenden Kräfte in derselben Beziehung zu einander stehen.

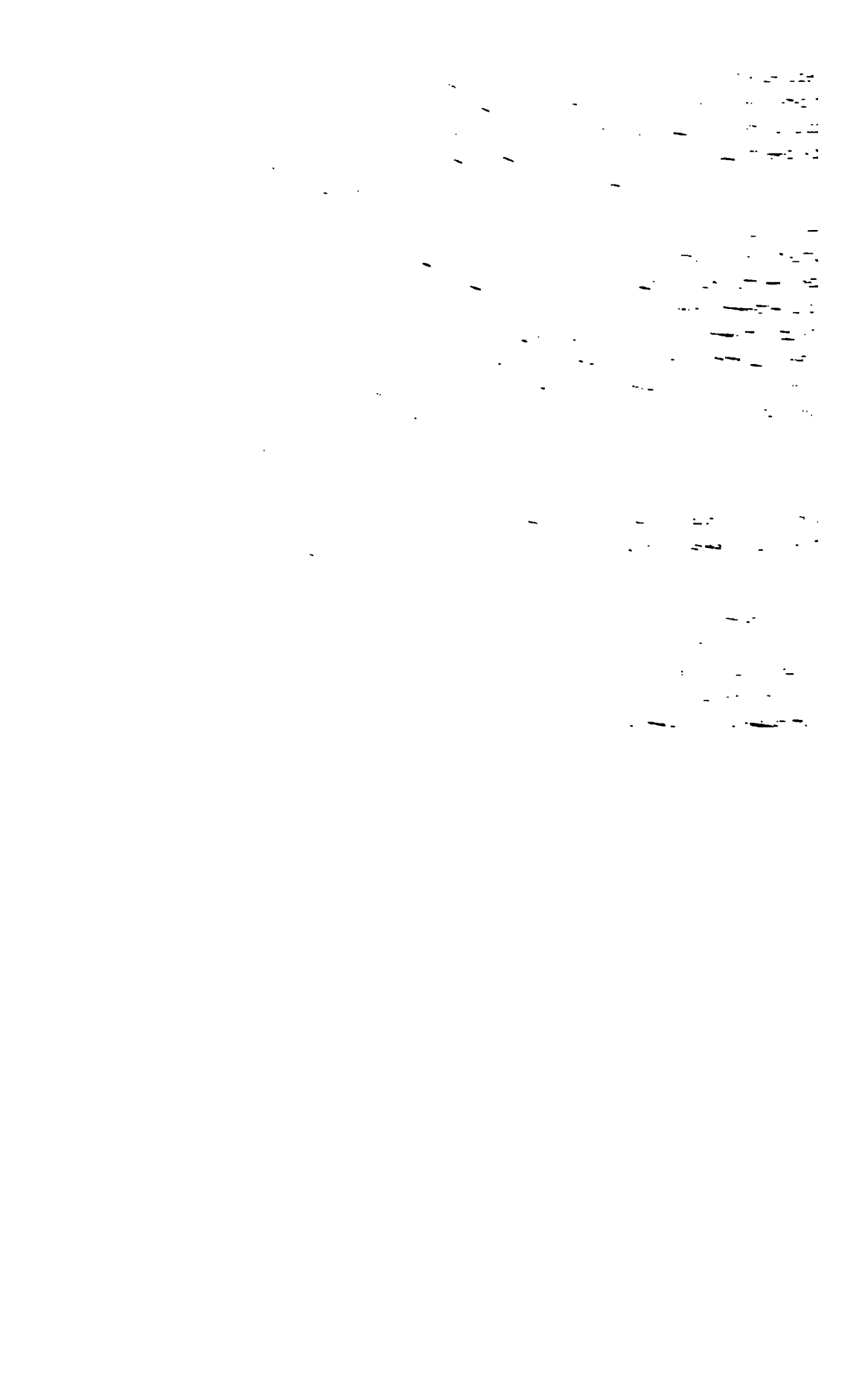
Nachdem wir so das Verhältnis zwischen zwei Massen definiert und eine bestimmte Masse als Einheit gewählt haben, werden wir die Werte der elektrischen Massen durch Zahlen ausdrücken können.

Indem wir im Felde eine Prüfmasse bewegen, werden wir in jedem Punkte die Stärke und Richtung des Feldes bestimmen können.

Die elektrische Kraft, die auf einen Punkt wirkt, kann die Richtung des Feldes oder die entgegengesetzte Richtung haben, je nachdem der Punkt mit positiver oder mit negativer Elektrizität geladen ist; aber niemals wird der Punkt von anders gerichteten Kräften angegriffen sein.

30. Grundgesetze des elektrischen Gleichgewichtszustandes. — Die erwähnten Grunderscheinungen und die entwickelten Betrachtungen zeigen uns die Möglichkeit, Instrumente zu konstruieren, welche auch ganz kleine Elektrizitätsmengen nachzuweisen und zu messen gestatten; es genüge, ihres geschichtlichen Interesses wegen, das *Goldblattelektroskop* und die *Torsionswage von Coulomb* zu erwähnen.

Durch die Heranziehung dieser einfachen Apparate kann man einige Gesetze aufstellen, die sich auf den elektrischen Gleichgewichtszustand beziehen.



jedem Punkte des Feldes existiert ein *elektrisches Potential*, welches einen Wert besitzt, der durch den Ausdruck

$$V = k \sum \frac{m}{r} + C \tag{2}$$

vollständig bestimmt ist, worin m eine beliebige, in der Entfernung r vom betrachteten Punkte gelegene Masse darstellt, die Summe $\sum$, die im allgemeinen eine Summe von Integralen ist, auf alle Massen des Feldes ausgedehnt werden muss und endlich C eine Integrationskonstante ist, welche von der Wahl des festen Punktes im Felde, auf den die Potentiale bezogen werden, abhängt.

Zwischen Potential und elektrischer Kraft besteht die Grundbeziehung

$$f_s = -\frac{dV}{ds}. \tag{3}$$

Die Energie eines elektrischen Feldes ist durch

$$W = \frac{1}{2} \sum m V \tag{4}$$

ausgedrückt, wobei m die Masse und V das Potential in einem beliebigen Punkte des Feldes bedeutet und die Summierung sich auf alle Massen des Feldes erstreckt.

Die elektrischen Felder besitzen jedoch besondere Eigenschaften, welche sie nicht mit allen Newton'schen Feldern gemeinsam haben, Eigenschaften, welche sich als Folgerung der anderen festgelegten Grundgesetze ergeben.

Im Innern eines Konduktors ist keine elektrische Masse vorhanden (I. Gesetz); man kann daher, ohne die Verteilung der Elektrizität zu verändern, in einem Konduktor den ganzen inneren Teil hinwegschaffen und ihm nur die Oberfläche, eine unendlich dünne Schale lassen, d. h. man kann den massiven Konduktor durch einen hohlen mit derselben Form und Oberfläche ersetzen. Nun ist im Innern eines hohlen Konduktors die Kraft gleich Null (II. Gesetz), also ist die Kraft auch im Innern eines soliden Konduktors gleich Null. Für alle Punkte im Innern eines Konduktors hat man also

$$\frac{dV}{ds} = 0,$$

woraus

$$V = \text{Konstant}$$

folgt. Diese Beziehung gilt für alle Punkte des Konduktors bezüglich aller Punkte seiner Oberfläche selbst. Da also im elektrischen Felde das Potential in allen Punkten eines Konduktors denselben Wert besitzt, so kann man den Konduktor zu einem Punkte zusammenschrumpfen lassen, ohne das Feld zu verändern.

… die elek-
…duktoren
…hlen Kon-
…olierte, in
…y liess, um
…genes Holz-
…r Aussenseite
… ihm nie, das
… innerhalb des
…seren Platte ge-

…lt wird, die elek-
…te sind, und man
… Gesetzes.

… hervorbringt, werden
… geliefert, so dass die
…smengen gleich Null ist.
…nen System von Körpern
…nehmen, welcher Wirkung
…ägt den Namen: *Prinzip*

…n man mittels eines hohlen
…smengen summiert. So kann
…äuschen eine elektrostatische
… der metallischen Bekleidung
…se Elektrizitätsmengen mit der
…halb etwas zeigt, weil sich die
…trizitätsmengen auf die äussere
…er gleich sind, zu Null summieren.

…n den erwähnten experimentellen
…ktrischen Felder im Gleichgewichte

… für die Newton'schen Felder ent-
…esetze zufolge, auf die elektrischen
…chen Massen sind also die Sätze von
… Teilen des Raumes, wo keine elektri-
…ung solenoidisch: in einem elektrischen
…raftlinien und Kraftröhren alle bei der
Felder besprochenen Eigenschaften. In

unendlich nahe dem Element selbst. Wir nennen die Kraft positiv, wenn sie nach aussen gerichtet ist.

Stellen wir uns die Kraftröhre vor, welche ab als Basis hat; sie schneidet auf der durch M senkrecht zu f gelegten Ebene ein Element $a'b'$ aus, dessen Inhalt ebenfalls dS ist. Wählen wir ferner im Innern des Konduktors eine beliebige Fläche c, welche ab als Begrenzung hat. Die Fläche c, das Element $a'b'$ und die Seitenfläche des Röhrenstückes, das sich zwischen ab und $a'b'$ befindet, bilden eine geschlossene Fläche, welche in ihrem Innern, auf dem Element ab, die elektrische Masse σdS enthält. Nach dem Gauss'schen Satze ist der aus ihr austretende Fluss $4\pi k\sigma dS$. Die Kraft ist nun auf der Fläche c gleich Null und fällt auf der Fläche der Röhre mit der Tangente, auf dem Element $a'b'$ mit der Normalen zusammen; der austretende Fluss ist also einfach fdS. Man hat daher:

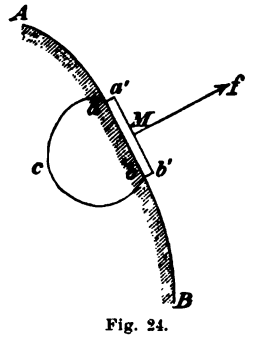


Fig. 24.

$$fdS = 4\pi k\sigma dS,$$

woraus

$$f = 4\pi k\sigma, \quad \sigma = \frac{f}{4\pi k}. \tag{5}$$

Zwischen der elektrischen Kraft in einem der Oberfläche eines Konduktors unendlich nahen Punkte und der Dichte auf der Fläche selbst besteht also eine einfache Proportionalitätsbeziehung.

Es ist wichtig, darauf zu achten, dass f und σ dasselbe Vorzeichen haben; dies beweist, dass die Kraft in den mit positiver Elektrizität geladenen Elementen nach aussen gerichtet ist, nach innen dagegen, wo die Ladung negativ ist.

Wir haben schon erwähnt, dass die Kraftlinien nur in dem isolierenden Raume vorhanden und zu der Oberfläche der Konduktoren senkrecht sind; jetzt können wir hinzufügen, dass dieselben von der Oberfläche der mit positiver Elektrizität geladenen Konduktoren ausgehen und auf der Oberfläche der negativ geladenen Konduktoren endigen.

33. Elektrostatischer Druck. — Auf der Oberfläche AB (Fig. 25) eines Konduktors betrachte man wieder ein Element ab vom Inhalt dS, auf welchem die Dichte den Wert σ besitzt; es sei ferner M ein Punkt, dessen Abstand von dem Element verschwindend klein gegen dessen Entfernung von der Begrenzung des Elementes ist. Die Kraft f im Punkte M kann man als Resultierende zweier Kräfte ansehen, nämlich der Kraft f_1, die von der auf dem Element ab verteilten Masse σdS

errührt, und der Kraft f_2, die von den anderen Massen des Systemes (die orher betrachtete Masse σdS ausgenommen) hervorgebracht wird.

Die Kraft f_1, die endlich sein kann, weil e von einer zwar unendlich kleinen, aber dem unkte unendlich nahe gelegenen Masse herrührt, t unendlich wenig verschieden von der Kraft, ie von einer auf der unbegrenzten Ebene, elcher das Element ab angehört, gleichförmig erteilten, überall die Dichte σ besitzenden lektrischen Masse auf den Punkt M ausgeübt wird; der Symmetrie wegen ist sie zur Ebene enkrecht gerichtet. Die Kraft f ist auch senkrecht auf dem Element ab, folglich hat auch die Kraft f_2 dieselbe Richtung, so dass man einfach setzen kann:

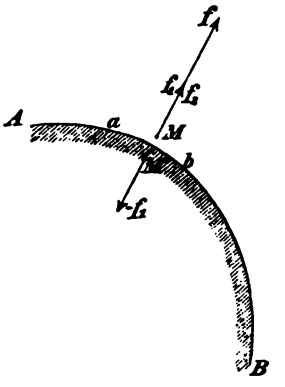


Fig. 25.

$$f = f_1 + f_2.$$

In dem im Innern des Konduktors und zu M in Bezug auf die Ebene ab symmetrisch gelegenen Punkte M' ist die Feldstärke gleich Null, die Kraft, die von der Masse σdS auf dem Element ab herrührt, gleich und der Richtung nach entgegengesetzt der Kraft f_1 in M; ferner ist in demselben Punkte, abgesehen von einer unendlich kleinen Grösse, die Kraft, die den übrigen Massen ihr Dasein verdankt, dieselbe wie f_2. Man hat daher:

$$f_2 - f_1 = 0, \quad f_1 = f_2 = \tfrac{1}{2} f;$$

da nun aber $f = 4\pi k\sigma$ ist, so folgt:

$$f_1 = f_2 = 2\pi k\sigma.$$

Nun wirken auf jeden Punkt des Elementes ab alle anderen Massen des Systemes mit Kräften, welche unendlich wenig von der Kraft f_2 differieren, mit welcher dieselben Massen auf den unendlich nahen Punkt M wirken. Auf dem Element ab ist aber die Masse σdS verteilt, deswegen wird sie durch die Wirkung der anderen Massen des Feldes von einer Kraft

$$f_2 \sigma dS = 2\pi k\sigma^2 dS$$

angegriffen.

Diese Kraft ist, wie die Kraft f_2, zur Oberfläche des Konduktors senkrecht und ausserdem immer positiv, d. h. nach aussen gerichtet, welches das Vorzeichen von σ auch sein möge.

Auf der Oberfläche eines elektrisierten Konduktors wirken also Kräfte, die immer nach aussen gerichtet sind. Die Kraft auf die Flächeneinheit hat den Wert

(6) $$p = 2\pi k\sigma^2$$

und heisst *elektrostatischer Druck*.

Das Vorhandensein des elektrostatischen Druckes kann auf recht anschauliche Weise dadurch bewiesen werden, dass man einer Seifenblase einen elektrisierten Körper nähert; durch Induktion elektrisiert sich die Seifenblase, durch den elektrostatischen Druck schwillt sie und platzt.

Die Kräfte pdS, die jedes Element dS der Oberfläche eines Konduktors angreifen, können als Kräfte angesehen werden, welche ihre Entstehung einer auf die Konduktoren von dem zwischen ihnen gelegenen, isolierenden Medium ausgeübten Zugspannung verdanken. Wir können uns die Erscheinung dadurch vorstellen, dass wir uns in dem Medium viele elastische Schnüre denken, die an den Elementen dS der Oberfläche der Konduktoren befestigt und so gespannt sind, dass sie auf das Element den Zug pdS ausüben. Das System der anziehenden und abstossenden Kräfte, welchen jeder Konduktor durch die Wirkung der elektrischen Massen des Feldes ausgesetzt ist, ist gleichwertig dem System der von dem isolierenden Medium auf die Konduktoren ausgeübten Spannungen pdS.

Es ist uns so nahe gelegt, an die Möglichkeit zu denken, dass die Wirkungen, die wir den zwischen den Konduktoren fernwirkenden Newton'schen Kräften zuschrieben, ihr Dasein Spannungen verdanken, welche in dem Medium existieren, in dem die Konduktoren sich befinden; Spannungen, welche von besonderen Deformationen, von einem Zwangszustande des elektrischen Gleichgewichts in dem Medium selbst, erzeugt werden. Unter dem mechanischen und mathematischen Gesichtspunkte ist die Betrachtung der Spannungen in dem isolierenden Medium der Betrachtung der Newton'schen Fernwirkungen unter den Konduktoren gleichwertig.

Um [illegible] welche von den beiden Deutungen des elektrischen Feldes [illegible] ist und den experimentellen Thatsachen mehr entspricht, wird [illegible] sein, dass die Erfahrung uns ein Mittel zur Beantwortung [illegible] bietet, wie gewöhnlich der Satz der elementaren Erscheinungen ist, welcher das elektrische Feld seine Entstehung verdankt. Wenn wir [illegible] annehmen, dass die Ursache der elektrischen Kraft [illegible] elektrischen Massen enthalten, auf die [illegible] eine gewisse elektrische [illegible] in diesen Punkten existierenden [illegible] Materie zu denken; [illegible] wahre, materielle [illegible] Newton'sche Behand- [illegible] unmittelbare Ursache [illegible] die Kraftwirkung [illegible] isolierenden

Medium, erscheint es nicht mehr natürlich, Fernwirkungen zu betrachten, sondern man wird dazu geführt, die Kraft als eine Äusserung eines Zustandes des isolierenden Mediums anzusehen, z. B. einer besonderen Deformation, welche sich kontinuierlich von Punkt zu Punkt mit unendlich kleinen Schritten fortpflanzt und sich durch die auf die Konduktoren ausgeübten Zugspannungen pdS bemerkbar macht.

34. Verteilung der Elektrizität auf der Oberfläche der Konduktoren. Spitzenwirkung. — Man betrachte das von irgend einem mit Elektrizität geladenen Konduktor M erzeugte Feld (Fig. 26). In einem Punkte, der so weit vom Konduktor entfernt ist, dass die Dimensionen des Konduktors gegen die Grösse des Abstandes vernachlässigt werden können, bleibt das erzeugte Feld das gleiche, ob man die elektrische Masse auf der Oberfläche des Körpers verteilt oder ob man sie ganz in einem Punkte O (ungefähr im Zentrum des Körpers) konzentriert annimmt. Über diese Entfernung hinaus sind also die Kraftlinien Gerade, die durch O hindurchgehen, die Niveauflächen Kugeln mit demselben Zentrum O, in gleichem Abstande von einander; die Kraft hat konstanten Wert in allen Punkten derselben Kugelfläche. In geringerer Entfernung vom Konduktor haben die Dimensionen desselben Einfluss auf die Gestaltung des Feldes; von der Form des Körpers hängt die Form der Niveauflächen ab und zwar um so mehr, je kleiner die Entfernung von dem Körper ist; die Oberfläche des Körpers ist selbst eine Niveaufläche. Die Kraftlinien, die, wie wir wissen, senkrecht zu allen diesen Flächen sind, hängen natürlich auch von der Form und von der Krümmung der Oberfläche des Körpers ab.

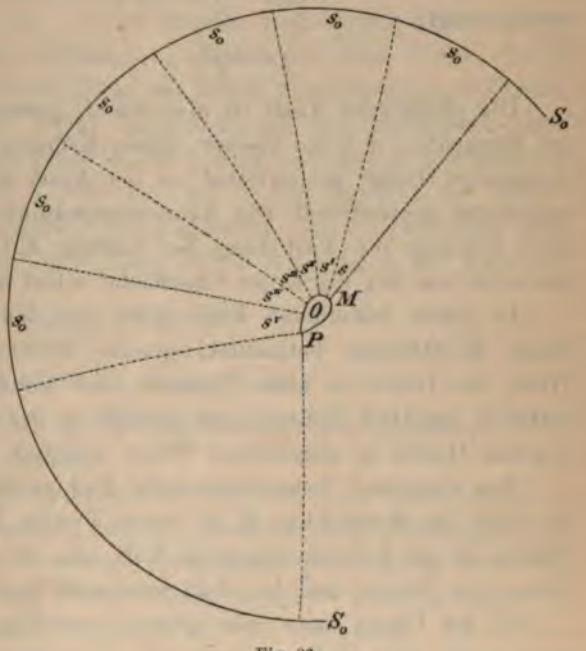


Fig. 26.

Es sei $S_0 S_0$ eine der kugelförmigen Niveauflächen, in deren sämtlichen Punkten die Kraft konstanten Wert besitzt. Denken wir uns die Fläche $S_0 S_0$ in viele Flächenelemente vom Inhalt s_0 zerteilt; durch jedes derselben hat der Kraftfluss denselben Wert $f_0 s_0$.

Nehmen wir diese Flächenelemente als Grundflächen von ebenso vielen Kraftröhren, welche auf der Oberfläche von M Elemente bestimmen, deren Inhalte s, s', s'', $\cdots$ um so kleiner sind, je mehr die Röhren konvergieren, d. h. je grösser die Krümmung der Fläche dieser Elemente ist. Der Kraftfluss durch diese Elemente hat die Werte fs, $f's'$, $f''s''$, $\cdots$, wenn wir durch f, f', f'', $\cdots$ die entsprechenden Werte der Kraft bezeichnen. Der solenoidischen Bedingung wegen hat man die Beziehungen

$$f_0 s_0 = fs, \quad f_0 s_0 = f's', \text{ etc.},$$

woraus folgt:

$$fs = f's', \quad \frac{f}{f'} = \frac{s'}{s}.$$

Die elektrische Kraft ist also um so grösser, je kleiner der Inhalt s des Elementes, d. h. je kleiner dessen Krümmungsradius ist, und da die elektrische Dichte proportional zu der Kraft ist, so ist auch die Dichte umgekehrt proportional dem Krümmungsradius. Man hat so das Gesetz, nach welchem die Verteilung der Ladung auf der Oberfläche der Konduktoren von der Form der Oberfläche selbst abhängt.

In jedem besonderen Falle wird man dadurch, dass man unendlich dünne Kraftröhren betrachtet, genaue Rechnungen aufstellen und die Werte der Dichte in allen Punkten eines Konduktors im Gleichgewichtszustande ermitteln können; uns genügt es, das der Verteilung zu Grunde liegende Gesetz in allgemeiner Weise erläutert zu haben.

Ein spezieller, bemerkenswerter Fall verdient besondere Beachtung. Es habe der Konduktor M in einem Punkte P eine Spitze; in diesem Punkte ist der Krümmungsradius Null, also ist die Kraft unendlich gross, ebenso die Dichte und der elektrostatische Druck.

In der Praxis kann man Spitzen herstellen, deren Krümmungsradien, wenn auch nicht Null, so doch sehr klein sind, wodurch also der Druck an diesen Stellen sehr gross wird. Dies erklärt uns die sogenannte *Spitzenwirkung*, d. h. das Bestreben der Spitzen die Elektrizität entweichen zu lassen. Es ist bekannt, dass diese Eigenschaft bei vielen elektrischen Apparaten und Instrumenten, wie z. B. bei den elektrostatischen Maschinen, nützlich verwertet wird.

35. Korrespondierende Flächen. — In dem elektrischen Felde denken wir uns nicht mehr einen einzigen, in sehr grosser Entfernung von allen anderen gelegenen Konduktor, sondern zwei einander nahe liegende

Konduktoren A und B (Fig. 27). Fassen wir nun eine beliebige, die beiden Konduktoren verbindende Kraftröhre ins Auge. Die Flächen mit der Begrenzung aa und bb, welche dieselbe auf den Konduktoren ausschneidet, heissen *korrespondierende Flächen*. Wir wissen [32], dass die Fläche aa, von welcher die Röhre ausgeht, positiv, und die Fläche bb, auf welcher die Röhre endigt, negativ elektrisiert ist; jetzt behaupten wir, dass die auf den korrespondierenden Flächen verteilten entgegengesetzten Massen m_a und m_b einander gleich sind. Stellen wir uns in der That im Innern der beiden Konduktoren je eine beliebige Fläche α und β vor, welche dieselbe Begrenzung hat, wie die betreffende korrespondierende Fläche; wir bilden auf diese Weise, durch jene Flächen und durch die Seitenfläche der Röhre, eine geschlossene Fläche, welche in ihrem Innern die beiden Massen m_a und m_b einschliesst. Der aus dieser Fläche austretende Fluss ist Null, weil die Kraft in den Punkten der inneren Flächen α und β Null ist und in den Punkten der Seitenfläche der Röhre mit der Tangente zusammenfällt; nun ist aber nach dem Gauss'schen Satz der austretende Fluss durch $4\pi k\,(m_a + m_b)$ gegeben; man hat daher:

Fig. 27.

$$4\pi k\,(m_a + m_b) = 0$$

oder

$$m_a + m_b = 0, \quad m_a = -m_b.$$

Zwei korrespondierende Flächen enthalten gleiche und mit umgekehrten Vorzeichen versehene elektrische Massen.

Das Theorem der korrespondierenden Flächen dient dazu, die Auffassung noch besser zu erläutern, dass die elektrischen Erscheinungen ihr Dasein Deformationen des Mediums verdanken. Wir können nun die Darstellung eines elektrischen Feldes durch elastische Schnüre ergänzen. Jede dieser Schnüre, die wir senkrecht auf der Oberfläche eines Konduktors befestigt dachten, können wir uns jetzt entsprechend einer zwei korrespondierende Elemente verbindenden Kraftröhre verlaufend denken. Es ist einleuchtend, dass an den Endpunkten einer und derselben Schnur gleiche elektrische Massen konzentriert sind, denn die fernwirkenden elektrischen Massen gleichen ihrer Wirkung nach den Spannungen der Schnüre.

36. Darstellung von besonderen elektrischen Feldern. Elektrostatische Influenz. — Die erwähnten experimentellen Thatsachen und die bewiesenen Sätze gestatten uns, bekannte Eigenschaften der elektrischen Felder abzu-

leiten. So ergeben sich z. B. die Erscheinungen der elektrostat Induktion selbst als notwendige Folgerung der allgemeinen Betracht die wir gemacht haben.

Denken wir uns ein gleichförmiges Feld, d. h. ein Feld, in w die Kraftlinien gleichförmig verteilte, parallele Gerade sind; die gl Potentialdifferenzen entsprechenden Niveauflächen sind parallele E in gleichem Abstande von einander.

In ein solches Feld bringe man einen isolierten Kondukto (Fig. 28). In einer gewissen Entfernung vom Konduktor ist die Wi

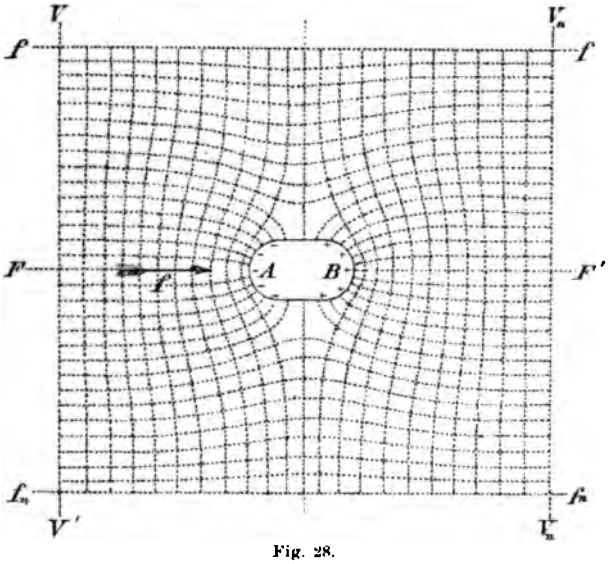


Fig. 28.

die durch die Einführung desselben hervorgebracht wird, nicht nachweisbar; über diese Entfernung hinaus kann man also das als unverändert betrachten. V und V' seien die ersten Niveaufl die man als Ebenen, f und f_n die ersten Kraftlinien, die man als ansehen kann. In geringerer Entfernung ist das Feld notwendige verändert, und zwar ist im Innern des Konduktors die Kraft Nu die Oberfläche AB des Konduktors selbst ist eine Niveaufläche. nahe beim Konduktor liegenden Punkten weichen die Niveaufläche AB wenig ab: bei wachsender Entfernung deformieren sie sich und nach, bis sie wieder Ebenen werden.

Den Teilen AB des Konduktors entsprechend hat man zw gionen, wo die Niveauflächen dichter nebeneinander sind. Es ist wenn die Niveauflächen sich zurückgezogen und deformiert hätte dem Konduktor Platz zu machen.

lie Kraftlinien deformieren sich derart, dass sie senkrecht zu lächen bleiben. Bei der in der Figur gewählten Richtung des en sich die Kraftlinien von der Region jenseits der Ebene V, h parallele Gerade sind, konvergierend nach dem Ende A; e nach dem Austritt aus dem Ende B divergieren, bis sie Ebene V_n wieder als Gerade betrachtet werden können.

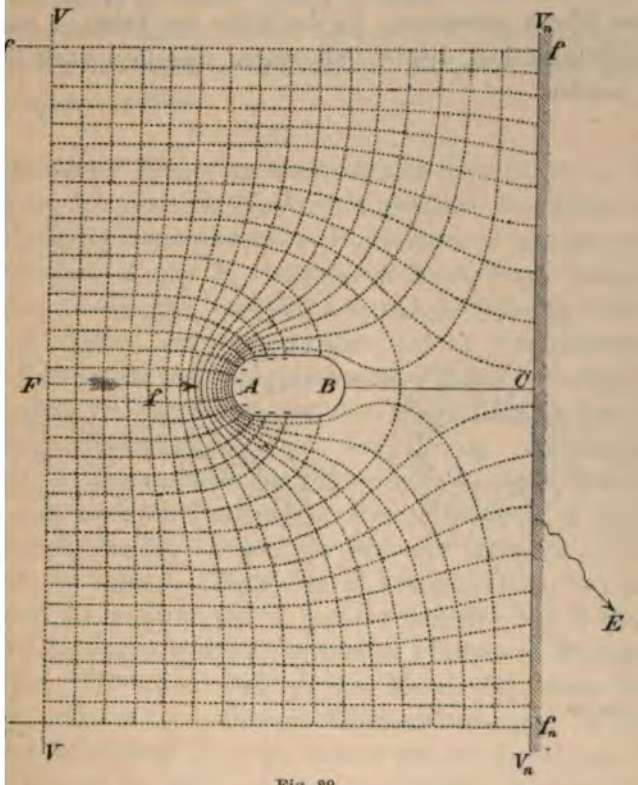


Fig. 29.

symmetrisch ist, so sind die Geraden FA und BF' noch Auf dem Teil A des Konduktors, wo die Kraftlinien ankommen, ie Verteilung von negativer Elektrizität, auf dem Teil B, von ftlinien ausgehen, eine Verteilung von positiver Elektrizität. ten wir noch ein Beispiel.

m homogenen Felde sei V_n (Fig. 29) die Niveauebene vom ull, gebildet z. B. von der Oberfläche eines Konduktors in mit der Erde. In dieses Feld versetze man einen durch lischen Faden BC mit der Fläche V_n und folglich mit der denen Konduktor AB. Über eine gewisse Entfernung hinaus

bleiben die Niveauflächen Ebenen, die Kraftlinien Gerade; V sei die erste dieser Ebenen, f und f_n seien die ersten geradlinigen Kraftlinien. In der Nähe des Konduktors ist das Feld notwendigerweise verändert. Die Niveaufläche vom Potential Null ist von der Ebene V_n, von der Oberfläche des Fadens BC und von derjenigen des Konduktors AB gebildet. Die folgenden Niveauflächen weichen nach und nach immer mehr von der Form der Fläche mit dem Potential Null ab, bis sie wieder die Form einer Ebene annehmen. In der Nähe des Teiles A des Konduktors sind die Niveauflächen dichter, als wären dieselben nach links von AB gedrängt worden.

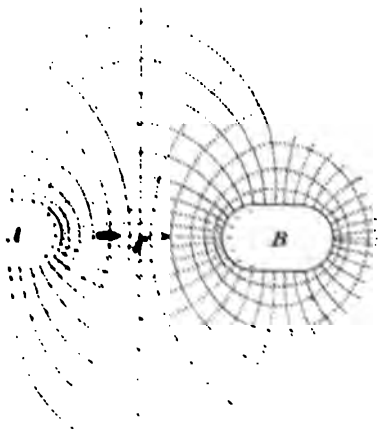


Fig. 30

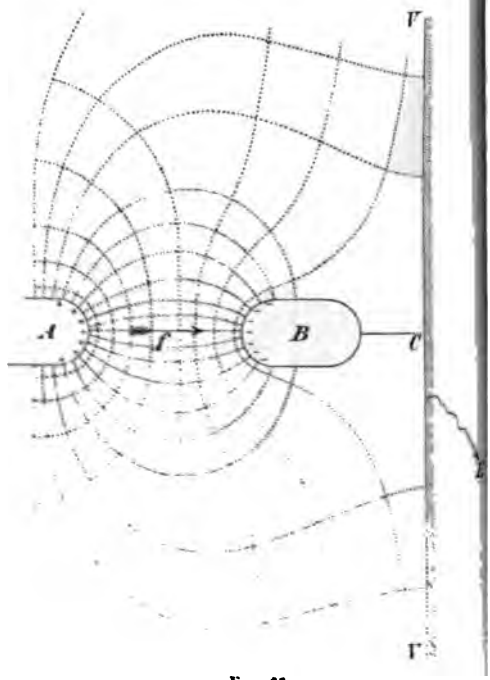


Fig. 31

Bei der gewählten Richtung des Feldes sind die Kraftlinien, die sich jenseits der Ebene V befinden, Gerade; sie konvergieren und häufen sich speziell auf dem Teile A an. Angenommen, es sei alles symmetrisch, [illegible] die Gerade FA eine Kraftlinie. Auf dem Konduktor AB endigen zwar Kraftlinien, aber keine geht von demselben aus; er ist daher lediglich [illegible] negativer Elektricität geladen, welche hauptsächlich auf dem Teile A [illegible].

In diesen beiden Beispielen haben wir die Influenz eines gleichförmigen Feldes auf einen Konduktor erläutert; man kann auf dieselbe

Weise die elektrostatische Influenz in dem allgemeinen Falle studieren, der sich uns häufiger bietet, nämlich die Influenz eines geladenen Konduktors A auf einen isolierten oder mit der Erde verbundenen Konduktor B.

Man erkennt aus denselben Betrachtungen, dass das Feld in den beiden Fällen die schematisch in Fig. 30 bezw. Fig. 31 dargestellte Anordnung hat, und kann dieselben Schlussfolgerungen in Bezug auf die elektrischen Ladungen in beiden Fällen ableiten.

Anstatt uns auf allgemeine Betrachtungen zu beschränken, könnten wir diese Fälle Berechnungen unterziehen und die quantativen Beziehungen der Erscheinungen ermitteln.

37. Elektrisierter Körper in einem hohlen Konduktor. — Es möge ein beispielsweise mit positiver Elektrizität geladener Konduktor innerhalb eines ihn vollständig einschliessenden Konduktors B gelegen sein. Alle im Raume zwischen A und B vorhandenen Kraftröhren gehen von der Oberfläche von A aus und endigen notwendigerweise auf der inneren Fläche von B. Daher entsprechen allen auf A vorhandenen Massen gleiche, dem Vorzeichen nach entgegengesetzte Massen im Innern von B, und folglich sind die sämtlichen auf den beiden Oberflächen verteilten Massen entgegengesetzt gleich. Nach dem Prinzip von der Erhaltung der Elektrizität ist die gesamte Elektrizitätsmenge, die A auf B hervorbringt, gleich Null; man muss also auf der äusseren Fläche von B eine positive Elektrizitätsmenge gleicher Grösse wie jene von A haben. Wenn A in Berührung mit der inneren Fläche von B kommt, heben sich die beiden gleichen Massen, die positive von A und die negative von B auf, so dass im ganzen die Ladung von A auf die äussere Fläche von B übergegangen ist. Dies liefert, wie schon erwähnt, ein Mittel [30], einen Konduktor vollständig zu entladen und mehrere Elektrizitätsmengen zu summieren.

Wenn der Konduktor B nicht isoliert ist, so bleibt sein Potential beharrlich Null, und die auf seiner äusseren Fläche erzeugte Elektrizität entladet sich zur Erde.

Irgend ein elektrischer Vorgang, der sich im Innern abspielt, bringt ausserhalb keine Wirkung hervor; andererseits wissen wir, dass ein beliebiger äusserer Vorgang keinen Einfluss auf das Innere des Konduktors hat; folglich trennt ein hohler, nicht isolierter und vollständig geschlossener Konduktor den Raum in zwei Teile, welche unter sich elektrisch vollständig unabhängig sind. Diese Eigenschaft findet wichtige Anwendung bei den elektrostatischen Messinstrumenten, welche vollständig von jedem äusseren Einfluss dadurch geschützt werden können, dass man sie in metallische, in Verbindung mit der Erde stehende Gehäuse einschliesst, welche so wirkliche *elektrische Schirme* bilden.

38. Änderung der Verteilung der Massen, ohne Veränderun Verteilung der Kraft in gewissen Regionen. — In einem elektr Felde betrachten wir eine Niveaufläche S, welche das Feld in zwei in einen inneren und in einen äusseren, zerlegt. Wenn wir die Fl durch ein dünnes metallisches Plättchen verkörpern, entstehen au beiden Seiten durch Influenz zwei gleiche und entgegengesetzte trische Verteilungen; die gesamte auf der äusseren Seite induzierte trische Ladung ist gleich der algebraischen Summe M der im Inne Fläche enthaltenen Massen m; auf der inneren Seite ist die g Ladung $-M$. Weil S eine Niveaufläche ist, wird dadurch das gewicht des Systems keineswegs gestört und der Wert der Kraft geändert; und zwar bringen die entgegengesetzt gleichen indu Massen, welche auf der Fläche S, ohne die Verteilung der a Massen zu ändern, im Gleichgewicht bleiben, in jedem Punkte g und der Richtung nach entgegengesetzte Kräfte hervor.

Nun erzeugen die innerhalb der leitenden Fläche gelegenen M kein Feld ausserhalb und die ausserhalb gelegenen Massen kein innerhalb derselben; wir können also sagen, dass das vorher im äu Raume von den innerhalb der Fläche gelegenen Massen erzeugte gleich dem Felde ist, welches jetzt von der auf derselben Fläche ver Masse M erzeugt wird, und ferner, dass das vorher innerhalb der Flä von den äusseren Massen erzeugte Feld gleich dem Felde ist, w jetzt von der Masse $-M$ auf S erzeugt wird.

Wenn man nur den inneren oder den äusseren Teil eines durc Niveaufläche in zwei Teile zerlegten elektrischen Feldes betrachtet, man immer die innerhalb oder ausserhalb der Fläche selbst gele Massen durch die elektrischen Massen ersetzen, welche auf der i oder auf der äusseren Seite derselben Fläche durch Influenz ent würden, wenn dieselbe metallisch verkörpert wäre.

Hat man im Felde nur den zwischen zwei Niveauflächen inneren S und der äusseren S', eingeschlossenen Raum zu betracht kann man, ohne die Verteilung der Kraft in diesem Raume zu ä die innerhalb von S und ausserhalb von S' gelegenen Massen dur Ladungen ersetzt denken, welche durch Induktion auf der äusseren von S bezw. auf der inneren von S' erzeugt werden würden, wen beiden Flächen metallisch verkörpert wären.

39. Geradlinige und zylindrische Verteilung. — Betrachten wi Feld, welches von einer längs einer unendlich langen Geraden A g förmig verteilten elektrischen Masse erzeugt wird; bezeichnen wir r (Fig. 32) auch die Spur der Geraden auf der Zeichnungsebene, mit

lektrische Liniendichte, d. h. in unserem Falle die auf der Längeneinheit erteilte Elektrizitätsmenge. Aus einfachen Symmetriegründen sind die Kraftlinien Gerade, welche die Gerade A unter rechtem Winkel schneiden und von derselben divergierend ausgehen, wenn wir annehmen, dass die betreffende elektrische Masse positiv ist. Die Niveauflächen sind Zylinderflächen, die als Achse die Gerade A haben; die Kraft besitzt auf jeder dieser Flächen konstanten Wert.

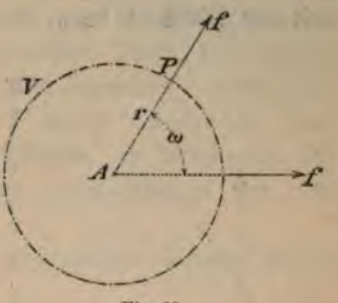


Fig. 32.

Der Fluss, der aus der geschlossenen Fläche austritt, welche von der Niveaufläche mit dem Radius r und von zwei zu der Achse senkrechten, im Abstande l von einander gelegenen Ebenen gebildet wird, ist $2\pi rlf$; andererseits giebt der Gauss'sche Satz, weil diese geschlossene Fläche in ihrem Innern die Masse $l\lambda$ einschliesst, für den austretenden Fluss den Ausdruck $4\pi kl\lambda$; man hat daher

$$2\pi rlf = 4\pi kl\lambda,$$

woraus folgt:

$$f = \frac{2k\lambda}{r}.$$

Die von zwei in der Geraden A sich schneidenden Ebenen gebildeten, keilförmigen Raumteile (Diëder) sind Kraftröhren. Wenn ω der Flächenwinkel der beiden Ebenen ist, so wird der Fluss durch das Diëder durch die Beziehung gegeben

$$\varphi : 4\pi kl\lambda = \omega : 2\pi,$$

woraus folgt:

$$\varphi = 2\omega kl\lambda.$$

Wir können auch das Potential in einem beliebigen Punkte des Feldes leicht berechnen. Wenn man sich an die Formel (3) und an den eben gefundenen Ausdruck für die Kraft erinnert, so hat man:

$$-\frac{dV}{dr} = f = \frac{2k\lambda}{r},$$

woraus folgt:

$$dV = -2k\lambda\frac{dr}{r}$$

und durch Integration

$$V = \text{Konst.} - 2k\lambda \log r.$$

Die Äquipotentialflächen sind durch die Gleichung

$$r = \text{Konst.}$$

bestimmt, sind also zylindrische Flächen mit der Achse A, wie wir sie erwähnt haben.

Man betrachte jetzt das Feld, welches von zwei entgegengesetzten gleichen, auf zwei parallelen Geraden A_1 und A_2 (Fig. 33) gleichförmig mit der Dichte λ bezw. $-\lambda$ verteilten elektrischen Massen herrührt.

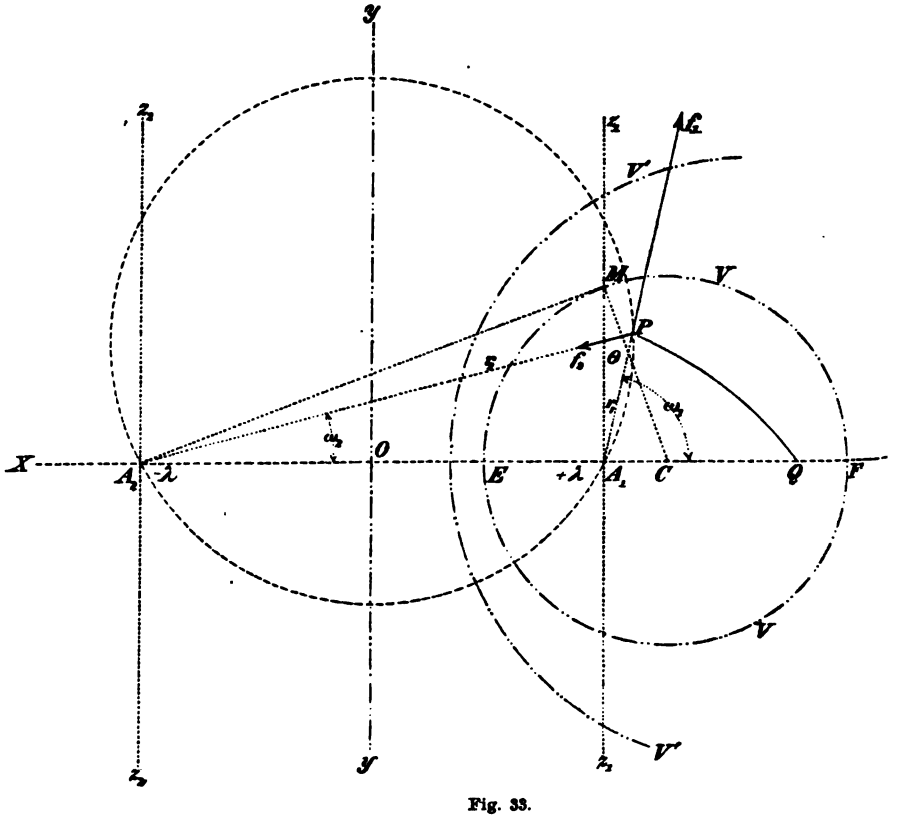


Fig. 33.

In einem beliebigen Punkte P des Feldes in der Entfernung r_1 von A_1 und r_2 von A_2 bringt die auf der Geraden AA_1 verteilte elektrische Masse eine nach A_1P gerichtete Kraft $f_1 = \frac{2k\lambda}{r_1}$ hervor; die auf der Gerade verteilte elektrische Masse erzeugt im Punkte P eine nach PA_2 gerichtete Kraft $f_2 = -\frac{2k\lambda}{r_2}$. Die Stärke des Feldes in dem Punkte P ist die Resultante der beiden Kräfte f_1 und f_2; sie ist in der durch P senkrecht zu A_1 und A_2 gelegten Ebene enthalten.

Alle Geraden, welche, wie die Gerade XX, senkrecht auf A_1 und A_2 stehen, sind Kraftlinien; alle senkrechten Schnitte der zylindrischen Flä-

als Direktrix eine Kraftlinie und als Generatrix eine zu A_1 und A_2 allele Gerade haben, sind ebenfalls Kraftlinien. Eine beliebige dieser indrischen Flächen bildet mit der Ebene, welche durch die Geraden A_1 A_2 gelegt ist, eine Kraftröhre, durch welche der Fluss konstant ist. Betrachten wir eine zylindrische Fläche mit einer Generatrix parallel den beiden Geraden und mit der beliebigen Linie PQ, deren le Q sich in der Ebene A_1A_2 befindet, als Direktrix; wenn wir, Generatrix Q festhaltend, die Generatrix P derart verschieben, dass Fluss durch die Fläche PQ konstant bleibt, so beschreibt die eratrix P eine zylindrische Fläche, einen geometrischen Ort von ftlinien.

Jede der auf A_1 und A_2 vorhandenen elektrischen Massen bringt h die Fläche PQ bezw. die Flüsse

$$\varphi_1 = 2\varkappa l\lambda\omega_1 \quad \text{und} \quad \varphi_2 = -2\varkappa l\lambda\omega_2$$

or; der resultierende Fluss ist

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 = 2\varkappa l\lambda(\omega_1 - \omega_2).$$

Aus der Betrachtung des Dreiecks PA_1A_2 ergiebt sich: $\Theta = \omega_1 - \omega_2$, daher ist

$$\varphi = 2kl\lambda\Theta.$$

Die Gleichung der Kraftlinien in der Ebene ist also

$$\Theta = \text{Konst.}$$

Dies ist die Gleichung eines Systems von Kreisen, die durch A_1 A_2 hindurchgehen, und deren Zentren sich auf der Geraden befinden, he senkrecht auf der Geraden A_1A_2 in ihrem Mittelpunkt O er- tet ist.

Die Niveauflächen sind zylindrische Flächen, mit einer Generatrix llel zu den Geraden A_1 und A_2, deren Gleichung wir leicht finden nen. Das Potential in einem beliebigen Punkte ist

$$V = V_1 + V_2;$$

ist

$$V_1 = \text{Konst.} - 2\varkappa\lambda \log r_1 \quad \text{und} \quad V_2 = \text{Konst.} + 2\varkappa\lambda \log r_2,$$

lich

$$V = \text{Konst.} + 2\varkappa\lambda \log \frac{r_2}{r_1}.$$

Die allgemeine Gleichung der Niveauflächen $V = \text{Konst.}$ giebt uns in em Falle

$$\frac{r_2}{r_1} = \text{Konst.}$$

Diese Gleichung stellt in der Zeichnungsebene die Kreise dar, deren chmesser EF so auf der Geraden A_1A_2 gelegen sind, dass die

... E und F in harmonischer Beziehung zu einander

$$\frac{A_2E}{A_1E} = \frac{A_2F}{A_1F}.$$

... diese Kreise leicht konstruieren. Man ziehe die ... Gerade z_1z_1 und von einem beliebigen Punkte ... Gerade A_2M und die Normale dazu; letztere bestim... ... des Kreises, der durch M geht. In analoger ... die Kreise, die durch die Punkte der in A_2 z... Geraden z_2z_2 hindurchgehen.

... Niveauflächen bilden zwei Systeme, wovon das eine um ... andere um die Gerade A_2 angeordnet ist: die ... durch die Ebene yy, welche selbst eine Niveaufläc...

... uns auf den Raum zwischen den beiden Niveauflä... ...rken, so können wir, nach den im vorigen Abschn... ...chtungen, die beiden ins Auge gefassten, gerad... ... Verteilungen durch diejenigen elektrischen Massen e... ... auf diesen Flächen entstehen, wenn man ... ..., die auf den beiden zylindrischen Flächen pro L... ... Achse verteilte Elektrizitätsmenge ist gleich der Dic... ... Verteilungen.

... legung gestattet uns, das eben gemachte Studium ... ... Verteilungen erzeugten Felder auszudehnen, d. ... von zwei entgegengesetzt gleichen, auf zwei paralleler... ...werden beide zylindrisch, oder der eine eben und der ... ...chen Massen erzeugt sind. Und zwar werden w... ...elektrisierten Konduktoren immer durch zwei gera... ...en können, welche eine Dichte gleich der auf de... ...eitseinheit verteilten Elektrizitätsmenge besitzen, u... ...d, dass die Oberflächen der beiden Kondu... ...dem von den gemachten Verteilungen erz...

...sche Kapazität. Man ... einen is... ... B etc. ... voraus, d... ... dem Kondu... ... auf den a... ...mal der K... ...Potential V am

dessen Wert durch die Formel (2) berechnet werden kann, wobei man nicht nur die dem Konduktor A erteilte elektrische Masse, sondern auch alle auf den anderen Konduktoren induzierten Massen in Betracht zu ziehen hat.

Ohne die Lage der Körper zu verändern, gebe man dem Konduktor A eine zweite, der vorigen gleiche Ladung; diese zweite Ladung verteilt sich auf der Oberfläche von A nach demselben Gesetze, nach welchem die erste Ladung sich verteilt hat, und bringt daher durch Induktion dieselben Massen wie vorhin auf dem anderen Körpern hervor. Dadurch, dass man die Ladung von A verdoppelt hat, hat sich in jedem der Posten $\frac{m}{r}$, die in dem Ausdrucke des Potentials vorkommen, m verdoppelt, während r unverändert geblieben ist; man hat also auch den Wert des Potentials verdoppelt.

Man kann daher sagen, dass zwischen dem Potential V, welches ein isolierter Konduktor in der Nähe anderer Konduktoren vom Potential Null durch das Auftreten der Ladung M annimmt, und der Ladung selbst, die Proportionalitätsbeziehung besteht

$$M = CV. \tag{7}$$

Allgemeiner kann man sagen: es ist die Ladung M, die man einem, gegebenen Konduktor in der Nähe von anderen mit konstantem Potential erteilen muss, um sein Potential vom Werte V_1 zum Werte V_2 zu bringen proportional der Differenz $V_2 - V_1$, d. h.

$$M = C(V_2 - V_1). \tag{7'}$$

Die Proportionalitätskonstante C nennt man *elektrostatische Kapazität.*

Die vorigen Beziehungen geben für die Kapazität den Ausdruck:

$$C = \frac{M}{V}; \qquad C = \frac{M}{V_2 - V_1}; \tag{7''}$$

wenn man $V = 1$, bezw. $V_2 - V_1 = 1$ setzt, so hat man:

$$M = C;$$

daraus folgt, dass die *elektrostatische Kapazität eines Konduktors* diejenige Elektrizitätsmenge ist, die man ihm geben muss, um sein Potential um die Einheit zu erhöhen, während das Potential jedes anderen, in der Nähe befindlichen Konduktors konstant bleibt.

Die Betrachtungen selbst, durch welche wir angeleitet worden sind, von Kapazität zu reden, beweisen, dass letztere nicht nur von der Form und den Dimensionen des betrachteten Konduktors, sondern auch von der Form, den Dimensionen und der Lage aller anderen in der Nähe befindlichen Konduktoren abhängt.

Die Kapazität eines Konduktors nimmt zu, deren, mit der Erde verbundenen Konduktor ni

Betrachten wir in der That nochmals den is denen Konduktor A, in der Nähe anderer, mit Konduktoren, und nähern wir ihm einen von de mindern dadurch die Entfernung der zu A geh auf diesem Körper induzierten negativen Massen, dem Ausdrucke des Potentials den Wert der n Es folgt daraus, dass man, ohne die Ladung de ändern, nur dadurch, dass ihm ein mit der Erde genähert wurde, den Wert des Potentials verkl Quotienten $\frac{M}{V}$, d. h. die Kapazität von A, erhöht

41. Kondensatoren. — Die oben erwähnte Ei Mittel, durch zwei Konduktoren, von denen der ein Erde abgeleitet ist, und die ausgedehnte, in sehr k gegenüberliegende Flächen besitzen, grosse Kapa seien z. B. A und B zwei ebene, parallele, von getrennte Platten. Abgesehen von den den Teilen ist das Feld zwischen den beiden Platt auf den Platten zwei gleiche, ungleichnamige Ladungen; jeder Masse $+m$ auf A entsprich auf B. In dem Ausdrucke des Potentials in ein Platte A entspricht, wenn r und r' die Abst korrespondierenden Elementen $+m$ und $-$ ein Posten $-\frac{m}{r'}$. Nun kann man, wenn Platten klein genug wählt, r' wenig versch und C sehr gross, erhalten.

Diese Ableitung ist noch strenger für den Konduktor A vollständig einschliesst trifft B; die Massen auf A und B si genügen, die gegenüberliegenden Flächen Schicht klein genug zu machen, u zu erzielen.

Das System zweier Konduktoren, einander gegenüber liegende Fläche nachdem man einen der Konduktore der grossen Kapazität wegen, dem

d. h. grosse elektrische Massen auf ihm anhäufen, ohne das Potential erheblich zu erhöhen.

Die beiden Konduktoren heissen die *Belegungen* oder *Armaturen* des Kondensators. Ein Kondensator heisst *geschlossen*, wenn eine der Belegungen von einer geschlossenen, die andere vollständig einschliessenden Fläche gebildet ist, und heisst *offen*, wenn dies nicht der Fall ist. *Kapazität eines Kondensators* ist die Kapazität einer seiner Belegungen, während die andere zur Erde abgeleitet ist, d. h. ist die Ladung, die man einer der Belegungen geben muss, um ihr Potential um die Einheit zu erhöhen, während die andere Belegung in Verbindung mit der Erde, oder allgemeiner auf konstantem Potential gehalten wird.

Die Kapazität ist nur für die geschlossenen Kondensatoren eine vollständig bestimmte Grösse, weil die äussere Armatur als elektrischer Schirm für die innere dient, welche keinen äusseren Einfluss empfindet. Für die offenen Kondensatoren ist dies nicht mehr streng richtig, aber in den Fällen der Praxis kann es mit hinreichender Annäherung als richtig angenommen werden, weil, wegen der grossen Fläche der Belegungen und ihrer kleinen Entfernung von einander, die Änderungen, welche die fremden Körper in der Verteilung der Ladung hervorbringen können, einen sehr kleinen Bruchteil der gesamten Ladung ausmachen, der vernachlässigt werden kann.

Betrachten wir einen geladenen Kondensator, d. h. einen Kondensator, in welchem eine Potentialdifferenz zwischen den Belegungen erzeugt wurde, indem man einer der Belegungen eine Elektrizitätsmenge M erteilte. Wenn wir die beiden Belegungen metallisch verbinden, so bilden dieselben einen einzigen Konduktor, auf welchem das Potential verschiedene Werte besitzt; das Gleichgewicht ist nicht mehr möglich, es muss daher eine Bewegung der Elektrizität stattfinden, und zwar muss die Masse $+M$ von einer zur anderen Belegung übergehen und die gleiche Masse $-M$ aufheben; das Potential beider Belegungen wird gleich Null; auf diese Weise haben wir den Kondensator entladen.

Bei der Entladung eines Kondensators entwickelt sich eine gewisse Energiemenge, und in der That kann man in dem Konduktor, welcher die beiden Belegungen verbindet, immer eine Erwärmung wahrnehmen; wenn die Potentialdifferenz genügend hoch gemacht wird, so findet die Entladung durch das Medium hindurch statt, bevor eine metallische Verbindung hergestellt ist, und zeigt sich dann durch den Funken an, welcher von Geräusch, Licht- und Wärmeerscheinungen begleitet wird. Diese Energie, die bei der Entladung entwickelt wird, war zuerst in dem Kondensator aufgespeichert. Um einen Kondensator zu laden, muss man eine Arbeit aufwenden, welche im Kondensator selbst angehäuft bleibt

schwer, solche Bestimmungen zu machen, sondern auch die zu messende Grösse gut zu definieren. Man erklärt sich so die Unterschiede der von den verschiedenen Forschern ermittelten Werte für ε. Der Versuch erlaubt nicht den exakten Wert des spezifischen Induktionsvermögens jeder Substanz zu bestimmen, sondern eher die Grenzen, zwischen welchen dieser Wert liegt.

Man hat z. B. für einige wichtige Körper folgende Werte gefunden:

$\varepsilon = 1$ . . . . . für Luft (der Definition nach);
$= 1$ . . . . . sehr angenähert für das absolute Vakuum und für die Gase. Für einige Gase ist der Wert um etliche Tausendstel kleiner, für andere grösser als die Einheit;
$= 1{,}6$ . . . . . für Seide;
$= 1{,}9$ bis $2{,}3$ für Paraffin;
$= 2{,}34$ . . . . für reinen elastischen Gummi;
$= 2{,}5$ bis $3{,}5$ für vulkanisierten Gummi;
$= 2{,}8$ bis $4{,}2$ für Schwefel;
$= 3$ bis 5 . für Guttapercha;
$= 5$ . . . . . für Glimmer;
$= 2$ bis 5 . für schweres, leicht schmelzbares Glas (flint);
$= 5$ bis 10 . für leichtes, schwer schmelzbares Glas (crown).

Trotz der Unsicherheit solcher experimentellen Bestimmungen sind die Unterschiede zwischen den verschiedenen Körpern so charakteristisch, dass sie deutlich nachweisen, wie gross die Bedeutung des isolierenden Mediums in einem Kondensator ist; die Ladung hat ihren Sitz in dem Medium, die beiden Armaturen sind nichts anderes, als ein Mittel, um mit grossen Oberflächen und dünner Schicht von Isolatoren arbeiten zu können.

Aber wenn dies für die Kondensatoren richtig ist, so liegt es nahe, dieselben Erwägungen allgemein auf alle elektrostatischen Erscheinungen auszudehnen. Ein Kondensator ist nichts anderes, als ein besonderer Fall eines elektrostatischen Systems; die Verschiedenheiten sind rein geometrischer Natur. Man kann durch kleine Abstufungen, in welchen man die Entfernung, die Form und die Dimensionen der Belegungen variiert, zu dem System zweier beliebigen Konduktoren übergehen, ohne durch diesen Übergang die physikalischen Bedingungen der Erscheinung im geringsten zu verändern. Diese Ableitungen für den einfachen Fall zweier Kondensatoren kann man gleich auf den allgemeinen Fall eines beliebigen Feldes ausdehnen. So sind wir zu der Annahme geführt, dass bei den elektrischen Erscheinungen das isolierende Medium die wesentlichste Rolle spielt; von dem Medium hängen die elektrischen Ladungen, die Potentialdifferenzen und die Energie des Systems ab. Nur in den Nichtleitern zeigen sich die elektrischen Kräfte wirksam; die Konduktoren sind dagegen durch eine negative Eigenschaft gekennzeichnet, durch die Unfähigkeit,

tz elektrischer Kräfte zu sein; sie stellen gewissermassen Lücken im ektrostatischen Felde dar.

Die nichtleitenden Körper wurden von Faraday, eben ihrer Eigenhaft wegen, die elektrischen Kräfte zu übertragen, *Dielektrika* genannt. as spezifische Induktionsvermögen ε, welches eine spezifische Grösse ist id die Eigentümlichkeiten jedes Dielektrikums definiert, heisst *Dielekizitätskonstante.*

Die Erfahrung weist uns also darauf hin, dass im Dielektrikum und cht in den Konduktoren die elektrischen Kräfte und die Energie des ldes ihren Sitz haben; was auch immer die Ursachen der elektrostatihen Erscheinungen sein mögen, es ist sicher, dass dieselben nicht in sonderen Zuständen der Konduktoren, sondern des Dielektrikums zu chen sind. Wenn ein elektrisches Feld vorhanden ist, so befindet sich s Dielektrikum in diesem Felde in einem Zwangszustande des Gleichwichts; jedes seiner Elemente ist besonderen Deformationen unterworfen.

43. Polarisation. Verschiebung. — Die Entwickelung der Erscheiungen und Gesetze der elektrischen Felder hat uns zu dem Schlusse gehrt [33], dass unter rein mechanischem Gesichtspunkte ein elektrostatisches ld sowohl als ein System von Newton'schen Kräften, welche unter den ektrischen Massen in die Ferne wirken, wie auch als ein System von pannungen pdS, welche im Dielektrikum existieren und sich längs der raftröhren fortpflanzen, angesehen werden kann. Nun haben uns die trachtungen im vorigen Abschnitte bewiesen, dass das Feld seine xistenz nicht einem besonderen Zustande der Konduktoren, auf welchen e elektrischen Massen verteilt sind, sondern einem besonderen Zustande s zwischen den Konduktoren gelegenen Dielektrikums, in welchem sich e elektrischen Kräfte zeigen, verdankt. Es liegt daher näher und entricht den experimentellen Thatsachen besser, das elektrische Feld als n System von Spannungen im Dielektrikum zu behandeln.

Ohne es zu wagen, irgend welche Hypothese über die Natur der eformationen aufzustellen, welche die Spannungen des Dielektrikums und lglich die elektrischen Kräfte erzeugen, können wir sogleich die Ähnhkeit bemerken, welche zwischen den Deformationen und Kräften im ielektrikum einerseits und den Deformationen und Kräften in einem astischen Körper andererseits besteht.

Ein elastischer Körper deformiert sich, wenn wir durch ihn eine raft übertragen wollen, und die Deformation bringt innere Kräfte hervor; ganz analoger Weise deformiert sich ein Dielektrikum, in welchem an ein elektrisches Feld erzeugt, und die elektrischen Kräfte sind die lge dieser Deformationen. Wie in einem deformierten elastischen Körper

Energie aufgespeichert ist, welche zurückgegeben wird, sobald die deformierende Ursache aufhört, so stellt ein elektrisches Feld eine Energie dar, welche zurückerstattet wird, wenn die Deformation verschwindet, welcher das Feld selbst sein Vorhandensein verdankte.

So z. B. deformiert sich das Dielektrikum bei der Ladung eines Kondensators, in dem Dielektrikum und nicht in den Belegungen wird die Energie angehäuft; bei der Entladung verschwindet die Deformation des Dielektrikums, welches die Energie zurückgiebt, die vorher aufgewandt wurde, um es zu deformieren. Aber die Analogie zwischen den beiden physikalischen Erscheinungen ist noch vollständiger: wie es keine vollkommen elastischen Körper giebt und immer Erscheinungen von rückständiger Elastizität auftreten, wodurch das Zurückkehren zu der ursprünglichen Form nur stufenweise stattfindet, so giebt das Dielektrikum nicht auf einmal die gesamte angehäufte Energie her, sondern es bleiben rückständige Ladungen, die durch nachfolgende Entladungen nach und nach zum Verschwinden gebracht werden können.

Es ist das Verdienst Faradays, die hergebrachte Art und Weise bei der Behandlung der elektrischen Erscheinungen verlassen und zuerst die Betrachtung des Dielektrikums in den Vordergrund gerückt zu haben. Um eine anschauliche Vorstellung darüber zu gewinnen, wie sich die Kräfte in dem Dielektrikum fortpflanzen, stellte sich Faraday (nicht um Hypothesen aufzustellen, sondern um an die alten Auffassungen anzuknüpfen) das Dielektrikum als von kleinen, selbst leitenden, aber in einem durchaus isolierenden Medium schwimmenden Körperchen gebildet vor. Wenn man in diesen Raum einen elektrisierten Körper bringt, so wirkt er durch Influenz auf die benachbarten Körperchen und diese auf die folgenden. Auf diese Weise elektrisieren sich alle Körperchen und richten sich in eine fortlaufende Reihe, entsprechend der Gestalt der Kraftröhren (Fig. 34); so pflanzt sich durch successive Influenz die Elektrizität durch das Dielektrikum fort. Wenn dieser Darstellungweise Faradays auch das Verdienst gebührt, dem Dielektrikum einen hervorragenden Platz bei der Betrachtung und Erklärung der elektrischen Erscheinungen eingeräumt zu haben, so führt sie doch eine ganz willkürliche Hypothese über seine Zusammensetzung ein.

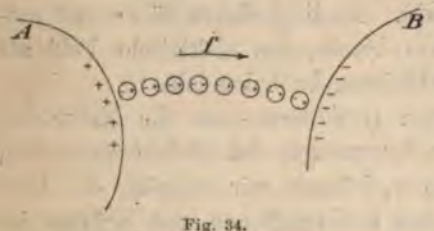


Fig. 34.

Lord Kelvin (vordem Sir William Thomson) gab, von denselben Auffassungen wie Faraday ausgehend, der Erscheinung eine Darstellung, welche den Vorzug hat, das Dielektrikum eine Rolle spielen

ne irgend eine Hypothese, weder über dessen Konstitution, noch Natur der Elektrizität einzuführen. Lord Kelvin denkt sich ktrikum durch Niveau- und Kraftröhrenflächen in Volumen- zerteilt und nimmt an, dass in dem vorhandenen Felde jedes Element auf den begrenzenden Niveauflächen denjenigen Be- genüge, die erfüllt sein müssen, damit es an einer Seite d an der anderen negativ geladen genannt werden kann. Indem unendlich dünne Kraftröhre betrachtet (Fig. 35) und sie in lemente durch Niveauflächen zer- t, findet man, dass jedes Element er Anschauungsweise, wenn das links nach rechts gerichtet ist, nken Seite eine negative und auf en Seite eine positive Masse be- gs einer und derselben Kraftröhre

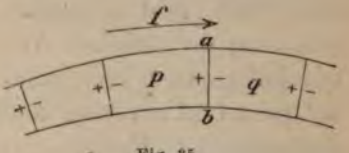


Fig. 35.

Massen gleich; ein beliebiger Schnitt ab einer Kraftröhre lglich, als dem Element p angehörend, eine positive und, als chbarten Element q angehörend, eine negative Masse; die beiden und dem Vorzeichen nach entgegengesetzten Massen heben sich Fernwirkungen auf und können also vorhanden sein, ohne dass Existenz konstatieren. Diesem besonderen Zustande des Di- ns giebt man den Namen *Polarisation.*

Erfahrung lehrt uns, dass in der Natur etwas Analoges wirklich muss. So findet man, wenn man in einem Stück Glimmer, das parallel an einander liegenden dünnen Blättchen besteht, ein es Feld in der zu den Spaltebenen senkrechten Richtung er- dem man z. B. an die Aussenseiten entgegengesetzt elektrisch Körper anlegt, dass, nachdem das Glimmerstück in seine einzelnen rteilt wurde, jedes Blatt auf den beiden Seiten einander entgegen- adungen besitzt.

well konnte, auf solchen Anschauungen fussend, die Polarisation nführung des Begriffs der *elektrischen Verschiebung*, ohne will- Hypothesen über die physikalische Natur der ät aufzustellen, einer strengen mathematischen ng unterwerfen.

chten wir eines der Elemente p (Fig. 36), wir das Dielektrikum zerteilt dachten. Wenn in der Richtung f polarisiert ist, so hat man n Seiten von p gleiche, aber ungleichnamige $-m$ auf ab und $+m$ auf cd. Wenn man nun die Masse ch eine unendlich kleine Verschiebung von cd nach ab bringt,

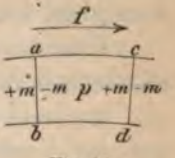


Fig. 36.

so legt sie sich dort über die gleiche negative Masse; die beiden Massen heben sich auf, und die Polarisation wird so vernichtet. Umgekehrt kann man sich denken, dass beide Massen zuerst in ab zusammenfallen und bei der Polarisation die Masse $+m$ sich nach cd verschiebt. Dies kann für jedes Element wiederholt werden; um uns also die Erscheinung der Polarisation zu erklären, können wir uns im Felde zwei gleiche elektrische Verteilungen, eine positive und eine negative denken. Wenn das Feld nicht vorhanden ist, fallen die beiden Verteilungen zusammen und heben sich auf; aber in dem Augenblicke, in welchem das Feld sich bildet, geht in jedem Volumenelement eine unendlich kleine Verschiebung der positiven Verteilung in der Richtung des Feldes vor sich. Die Polarisation kann auch dadurch erzeugt gedacht werden, dass man die positive Verteilung festhält und die negative in der dem Felde entgegengesetzten Richtung verschiebt, oder auch, dass man beide Verteilungen in einander entgegengesetzten Richtungen verschiebt. Wesentlich ist hier nur die relative und nicht die absolute Verschiebung der beiden Verteilungen.

Grösserer Einfachheit halber wird es angemessen sein, immer die Verschiebung der positiven Verteilung zu betrachten, welche in der Richtung des Feldes stattfindet, d. h. nach aussen bei positiv und nach innen bei negativ geladenen Konduktoren.

Es möge dS ein zu der Richtung, in welcher die Verschiebung stattfindet, senkrechtes Flächenelement sein; während diese Verschiebung geschieht, geht durch das Element eine Elektrizitätsmenge dm hindurch; das Verhältnis

$$b = \frac{dm}{dS}$$

in einem Punkte P des Elementes heisst *Wert der Verschiebung* in diesem Punkte.

Die Verschiebung ist eine Vektorgrösse; ihr Tensor ist durch die Elektrizitätsmenge gegeben, welche in dem Moment, in welchem die Polarisation stattfindet, die Einheit der zu ihrer Richtung senkrechten Fläche durchsetzt; ihre Richtung ist in jedem Punkte diejenige des Feldes, wenigstens wenn wir uns darauf beschränken, isotrope Körper zu betrachten.

Wenn in jedem Punkte die Verschiebung gegeben ist, so ist die Beschaffenheit des Feldes vollständig bestimmt.

In einem elektrischen Felde kann man unmittelbar durch den Versuch nur das Vorhandensein der Kraft konstatieren. Bei der Newton'schen Auffassung betrachtet man die Divergenz der Kraft; wo die Divergenz nicht den Wert Null hat, sagt man, dass eine elektrische Masse vorhanden ist, welcher man in Gedanken eine wirkliche Existenz zuschreibt.

i der Maxwell'schen Auffassung betrachtet man direkt den Vektor in em Punkte und denkt man sich den Vektor selbst verkörpert. Man hat eine Vorstellung, welche direkter und weniger künstlich ist, und die gen die Newton'sche Theorie den Vorzug bietet, unsere Betrachtungen das Dielektrikum zu lenken, wo, wie die Erfahrung lehrt, der Sitz elektrischen Erscheinungen ist.

Die Maxwell'sche Theorie geht von einem anderen Grundbegriffe , aber sie beruht ebenfalls auf keiner besonderen Hypothese über die tur der Elektrizität oder über die Zusammensetzung der Dielektrika l der Konduktoren, sie kann sogar mit jeder Hypothese in Übereinmung gebracht werden.

Wenn man z. B. das Feld als von einer thatsächlichen Deformation Materie erzeugt, oder als von einer Orientierung der kleinen Massechen bedingt annähme, wäre es stets möglich, diese Deformation oder se Orientierung durch die Maxwell'sche Verschiebung darzustellen.

In Punkten, welche der Oberfläche der Konduktoren angehören, ist Wert der Verschiebung gleich dem Wert der elektrischen Flächenhte; der Verschiebungsfluss durch eine gegebene Fläche ist gleich der ihr verteilten elektrischen Masse; wenn der Fluss austritt, so ist die sse positiv, wenn er eintritt, negativ.

Der aus einer beliebigen, geschlossenen Fläche austretende Fluss der schiebung ist gleich der Summe der elektrischen Massen, welche innerb der Fläche enthalten sind; diese Summe ist im allgemeinen von ll verschieden, und folglich hat die Verschiebung keine solenoidische rteilung. Der Grenzwert des Verhältnisses des aus der Fläche austenden Flusses zu dem von ihr begrenzten Volumen, d. h. die Divergenz Vektors b, ist gleich der elektrischen Dichte in diesem Raume.

Nur im Dielektrikum ist die Verschiebung solenoidisch verteilt; ihr ss ist konstant längs einer und derselben Kraftröhre. Daraus ergiebt unmittelbar das Theorem der korrespondierenden Flächen.

Die eben gemachten Betrachtungen gelten für sich im Gleichgewichte indende elektrische Felder, aber es wird gut sein, auch den Augenck zu betrachten, in dem die Polarisation stattfindet. Wenn innerhalb er beliebigen, geschlossenen Fläche eine positive elektrische Masse ergt wird, so muss nach dem Prinzip der Erhaltung der Elektrizität wendigerweise auch eine gleiche, negative Masse entstehen. Dies betet, dass durch eine beliebige, geschlossene Fläche, durch welche ein schiebungsfluss austritt, ein solcher mit gleicher Grösse eintreten ss; der gesamte Fluss ist gleich Null.

Diese Eigenschaft, welche die Erfahrung in der Gesamtheit der Erinungen als richtig erweist, muss, solange ein Gegenbeweis fehlt, als

in jedem Element bestehend angenommen werden. Daher werden wir sagen, dass die elektrische Verschiebung in dem Moment, in dem sie stattfindet, solenoidische Verteilung besitzt; die Verschiebungslinien sind in sich geschlossene Linien, die durch die Dielektrika und die Konduktoren hindurchgehen.

Die elektrische Verschiebung breitet sich also, während sie erzeugt wird, in ganz analoger Weise aus, wie sich in der ganzen Masse einer Flüssigkeit mit unveränderlichem Volumen die in einem ihrer Punkte erzeugte Verschiebung fortpflanzt. Innerhalb irgend einer geschlossenen Fläche kann kein Volumen der Flüssigkeit eintreten, ohne dass zur gleichen Zeit ein gleiches Volumen herausfliesst.

Die elektrische Verschiebung findet im ganzen Raume statt; in den Dielektriken setzen sich der Verschiebung elastische Gegenwirkungen entgegen, welche mit dem Wachsen der Verschiebung zunehmen; in den Konduktoren entstehen solche Gegenwirkungen nicht. Wir können uns das verschiedene Verhalten der Dielektrika und der Konduktoren materiell vorstellen, indem wir auf den Vergleich mit den im Innern einer nicht-zusammendrückbaren Flüssigkeit vor sich gehenden Verschiebungen zurückgreifen. Denken wir uns im Dielektrikum die Niveauflächen und die Flussröhren durch Membranen verkörpert, welche einer Deformation, obwohl nachgebend, doch elastische Reaktionen entgegensetzen; das Dielektrikum stellt sich so in viele Zellen zerteilt dar, welche wir uns mit der Flüssigkeit erfüllt denken. Auf diese Weise kann sich wohl eine Verschiebung in der Flüssigkeit fortpflanzen, aber es werden die Membranen deformiert, und diese entwickeln elastische Gegenwirkungen gegen die Verschiebung. In den Konduktoren dagegen existieren entweder solche Membranen nicht, oder sie weichen jedem noch so kleinen Zwange, ohne elastische Gegenwirkungen hervorzubringen.

Wir werden sehen, dass auch die Konduktoren der elektrischen Verschiebung Widerstand leisten; dieser ist aber nur ein passiver Widerstand, der Energie verzehrt, nicht ein elastischer Widerstand, der Energie aufspeichert, um sie wieder zurückzuerstatten.

Die soeben angestellte Betrachtung über die Verschiebung einer unverdichtbaren Flüssigkeit, welche nur als eine mögliche, mechanische Darstellung des Phänomens aufzufassen ist und nicht eine Erklärung desselben sein soll, macht die Analogie der elektrischen Polarisation mit der elastischen Deformation noch handgreiflicher. Die elektrische, wie die deformierende Kraft ist proportional der Kraft, mit welcher das, was sich verschiebt oder deformiert, die elastischen Gegenwirkungen überwindet; sie ist also proportional der elastischen Gegenwirkung selbst und hat die entgegengesetzte Richtung, d. h. die Richtung der Verschiebung.

14. Physikalische Bedeutung der konstanten Faktoren k und ε. — nem der Oberfläche eines Konduktors unendlich nahen Punkte be- zwischen der Kraft f und der elektrischen Dichte σ die Beziehung $4\pi k\sigma$. Auf der Oberfläche eines Konduktors haben Dichte und rische Verschiebung b gleichen Wert, man hat also auch:

$$f = 4\pi k b, \quad b = \frac{f}{4\pi k}.$$

Nun sind beide Vektoren b und f in dem Dielektrikum solenoidisch lt; ihr Verhältnis bleibt sich längs einer und derselben Kraftröhre . Die soeben abgeleiteten Beziehungen gelten also im allgemeinen den Punkt des Dielektrikums.

Im elektrischen Felde sind Verschiebung und Kraft einander propor-, gerade wie in einem elastischen Körper Proportionalitätsbeziehung hen der Deformation und der deformierenden Kraft besteht.

Um die Verschiebung *Eins* zu erzeugen, ist eine Kraft $f_0 = 4\pi k$ lerlich.

n der Elastizitätslehre heisst der Proportionalitätsfaktor, welcher raft angiebt, die nötig ist, um in einem Stabe mit der Länge dem Querschnitt *Eins* die Verlängerung *Eins* hervorzubringen, zitätskoeffizient. In analoger Weise könnte man die Konstante $4\pi k$ *zient der elektrischen Elastizität* des Dielektrikums nennen; ihr ist für verschiedene Dielektrika verschieden. Diese physikalische retation des Faktors k der Coulomb'schen Formel ergiebt klar, r nicht ein einfacher, numerischer Koeffizient, sondern eine wahre, kalische Grösse ist.

Zwischen dem Faktor k und der Dielektrizitätskonstante ε besteht emerkenswerte Beziehung.

Von einem aus zwei parallelen, ebenen und um D von einander ent- n Belegungen bestehenden Kondensator betrachten wir einen weit en Rändern entfernten Teil vom Inhalte S; auf jeder der Belegungen ne Masse $M = S\sigma$ gleichförmig verteilt; die zu den Belegungen echte Kraft hat in jedem Punkte den konstanten Wert $f = 4\pi k\sigma$; hen den Belegungen besteht eine Potentialdifferenz

$$V_1 - V_2 = \int_0^D f\,dn = fD = 4\pi k\sigma D.$$

Der allgemeine Ausdruck

$$C = \frac{M}{V_1 - V_2}$$

für die Kapazität des betrachteteten Stückes den Wert

$$C = \frac{S}{4\pi k D}$$

Aus dieser Bezi
densators umgekehrt
der Definition der D
portional zu ε, und

Welches der W
That ist uns für
konstanten bekann
verschiedenen Kör
Wert der Dielektr
und zwar den de
der absolute Wer
deshalb einen wi
und zwar nimmt
Dies ist die Hyp
trischen Massein
Nach diese
alle Körper

Die Bezieh
schiebung kön
(10')
gebracht werd
Die Diel
welche propo
hervorgerufen
sich zu pola
Durchlässigk

45. En
Theorie ist
Ausdruck g

Nach
nicht in d
sondern i

Sie

...den, dass unter
...ichung (11) genü
... Hypothese ergieb
..., wo die Kraft
...en. Nach dieser Hy
...ergiemenge:

...eser Ausdruck die Arb
... eine Verlängerung b
... deformierten Körper
... der Energieverhältni
... den elektrischen Erschei

... aus der Formel (10') geg
...er Volumeneinheit vorh
... elektrischen Kraft ausge

...schaltung von Kondensatoren.

...men, wir hätten n Kondens
... äussere Wirkung jeder ein
...ahe sein können, ohne dass
... befürchten ist.
...*schaltung* her, d. h. verbinde
... und ebenso alle äusseren. W
... Kondensator, dessen eine Bel
...schen besteht, während die a
... gebildet wird, und dessen Kap
...nn wir einer der Belegungen
...en und die andere auf konsta
...ntialdifferenz V zwischen den b

$$V = M$$

M_n die Ladungen und $C_1, C_2, \ldots$
...ndensatoren sind, so ist

$$\ldots M_2 \cdots C_n V = M_n$$

$$\ldots V = M_1 + M_2 + \cdots + M_n.$$

Es ist aber $M_1 + M_2 + \cdots + M_n = M$, folglich ist

$$C = C_1 + C_2 + \cdots + C_n.$$

Die Kapazität eines Systems parallel geschalteter Kondensatoren ist gleich der Summe der Kapazitäten der einzelnen Kondensatoren.

Wenn wir dagegen die n Kondensatoren isolieren und die äussere Belegung des einen mit der inneren des folgenden verbinden, so nennen wir dies *Hintereinanderschaltung* der Kondensatoren. Erteilen wir der inneren Belegung des ersten Kondensators eine Ladung M und halten wir die äussere Belegung des letzten auf konstantem Potential, so besteht wieder die Beziehung

a) $$\frac{M}{C} = V,$$

wobei C die Kapazität des Systems und V die Potentialdifferenz zwischen der Innenseite des ersten und der Aussenseite des letzten Kondensators ist. Die einzelnen Kondensatoren erhalten durch Influenz die gleiche Ladung M, und es gilt für dieselben

b) $$\frac{M}{C_1} = V_1 \quad \frac{M}{C_2} = V_2 \quad \cdots \quad \frac{M}{C_n} = V_n,$$

worin V_1, V_2, $\cdots$ V_n die Potentialdifferenzen zwischen den einzelnen Kondensatoren sind, deren Summe

c) $$V_1 + V_2 + \cdots + V_n = V$$

ist.

Durch Addition erhalten wir aus den Gleichungen (b)

$$M\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \cdots + \frac{1}{C_n}\right) = V_1 + V_2 + \cdots + V_n,$$

woraus durch Vergleichung mit den Gleichungen (a) und (c)

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \cdots + \frac{1}{C_n}.$$

Der reziproke Wert der Kapazität eines Systems von hintereinandergeschalteten Kondensatoren ist gleich der Summe der reziproken Werte der Kapazitäten der einzelnen Kondensatoren.

Die allgemeine Formel $C = \frac{M}{V}$ setzt uns in den Stand, die Kapazität einiger Kondensatoren von besonderer Form zu berechnen, welche in der Praxis häufige Anwendung finden. Wir werden die Kapazität C_0 einiger Luftkondensatoren berechnen, indem wir für die Luft $k = 1$ voraussetzen, d. h. indem wir das System der elektrostatischen Einheiten zu Grunde legen [44]. Wenn der Kondensator dieselbe Form und dieselben Dimen-

Es verdient jedoch hier
endlich vielen Verteilungen,
einfachste diejenige ist, d
$\frac{1}{2} bfdv$ die Energie im E
Verschiebung bezw. die Wer
ist die in der Volumeneinh

(12)

In der Theorie der E
man verrichten muss, um
zeugen; diese Arbeit w
speichert. So besteht al
schon mehrmals bemerkt
und den elastischen Def

Indem man in die
Wert von b einsetzt,
Energiemenge lediglich

(12′)

46. Parallel- und R
zität einiger Kondensat
z. B. Leydner Flasche
unmerklich ist, so da
beträchtliche gegensei

Stellen wir die se
alle inneren Belegung
halten auf diese Weis
aus den Innenseiten
durch die Aussenseite
wir mit C bezeichne
Kondensators eine La
Potential halten, so
Belegungen durch di

gegeben. Wenn u
die Kapazitäten de

$(C_1$

und durch Summa

$(C_1 +$

spezifischen Induktions-
[42]

O (Fig. 38) das Zentrum,
Kugelflächen, welche
des Kondensators bilden.
die äussere Belegung zur
hat, erteile man der inneren
M: eine gleiche und ent-
Ladung $-M$ entsteht dann
Fläche der äusseren Be-
durch die Wirkung dieser La-
welche sich um R_1 bezw. R_2 vom
entfernt befinden, nimmt das
im Zentrum und folglich in
Wert

$$\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$$

Kondensators ist daher

$$\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$$

R_2
R_1

wir gelangen, wenn wir die Potential-
Belegungen berechnen, indem wir nicht von
Voraussetzung ausgehen, sondern das elektrische
Gleichgewicht betrachten.

Aus Symmetriegründen, die Niveau-
flächen, die Kraftlinien Strahlen, die durch
Kraftröhren im Dielektrikum liegende
um O. Durch eine und dieselbe Röhre
ist die Kraft umgekehrt proportiona
welche der Kegel auf den Niveauflächen
proportional dem Quadrat der Radien diese

Kraftlinie AB und auf derselben eine
R. Bezeichnet σ die elektrische Dich
hat die Kraft im Punkte A den We
Wert

$$K_1 = 4\pi\sigma \frac{R_1^2}{R^2}.$$

Wenn man beachtet, dass die Kraft f die Richtung des Radius besitzt, so giebt uns die Formel (3):

$$dV = -fdR = -4\pi\sigma R_1^2 \frac{dR}{R^2},$$

und indem man längs der Linie AB integriert

$$V = 4\pi\sigma R_1^2 \int_{R_1}^{R_2} \frac{dR}{R^2} = 4\pi\sigma R_1^2 \left[\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right].$$

Die auf der Oberfläche der inneren Belegung verteilte Elektrizitätsmenge ist

$$M = 4\pi\sigma R_1^2.$$

Die Kapazität des Kondensators ist also

$$C_0 = \frac{M}{V} = \frac{1}{\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}} = \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1},$$

wie oben schon ermittelt wurde.

Wenn der Abstand $D = R_2 - R_1$ sehr klein und im Vergleiche mit dem Radius R einer der beiden Belegungen zu vernachlässigen ist, so kann man

$$C_0 = \frac{R^2}{D}$$

annehmen, und wenn man mit $S = 4\pi R^2$ den Flächeninhalt der Belegungen bezeichnet, so kann man setzen

$$C_0 = \frac{S}{4\pi D}.$$

Betrachten wir auch den anderen Grenzfall, worin die Dicke des Dielektrikums unendlich gross ist; wenn man annimmt, dass R_1 endlich sei und R_2 nach dem Unendlichen strebe, hat man als Grenzwert

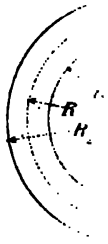
$$C_0 = \frac{1}{\frac{1}{R_1}} = R_1.$$

Dies ist der Fall einer im Raume isolierten, von jedem anderen Konduktor entfernten Kugel; ihre Kapazität ist im elektrostatischen Masssystem durch dieselbe Zahl wie der Radius ausgedrückt.

2. *Zylindrische Kondensatoren.* Die beiden Belegungen sind Kreiszylinder mit gemeinsamer Achse. In Fig. 39 stellen wir den zur Achse senkrechten Schnitt der beiden Zylinderflächen dar; R_1 und R_2 sind die Radien, O ist die Spur der Achse. Betrachten wir einen Teil des Kondensators von der Länge l, so weit von den Rändern entfernt, dass die elektrischen Ladungen auf den beiden Belegungen als gleichmässig verteilt angenommen werden können.

sionen h
vermöge

1.
R_1 und



jedem P

an. Die

(13)

Zu
differenz
der New
Feld in

In
flächen
das Zen
Teile ve
ist der
dem In
bildet,
Kugelfl

Be
Punkt
auf der
$f_1 = 4$

vegen die Niveauflächen ko-
Radien der senkrechten
Zylinders, die Kraftröhren
, die von zwei durch die
gehenden und von zwei zur
ten Ebenen eingeschlossen
ings einer und derselben Röhre
umgekehrt proportional dem
Schnitte, welche die Röhre auf
flächen bestimmt, und folglich
proportional den Radien dieser
Flächen. Die Kraft hat in
Belegung den Wert $f_1 = 4\pi\sigma$ und
mit dem Radius R den Wert

$$\quad \cdot \frac{R_1}{R}.$$

Berechnung (3) ein Mittel, die Poten-
Belegungen zu berechnen; es ist:

$$= 4\pi\sigma R_1 \log \frac{R_2}{R_1}.$$

Belegung ist

$$= \quad /\sigma,$$

Condensators:

$$\log \frac{R_2}{R_1}$$

Ausdruck grosse Wichtigkeit, weil
Capacität der unterseeischen und unter-
welche als zylindrische Kondensatoren
Kabel einfach ist, so sind die beiden
und von dem äusseren metallischen
Kabel konzentrisch ist, so bilden die

den Grenzfall, in welchem der Abstand
ist. Wenn D dieser Abstand ist, so

$$\log \frac{R_2}{R_1} = \log \left(1 + \frac{D}{R_1}\right);$$

dass in der Reihe des Logarithmus

n Potenzen von $\frac{D}{R_1}$ schon von der zweiten ab vernachlässigt
nen, so kann man $\log \frac{R_2}{R_1} = \frac{D}{R_1}$ setzen, und folglich erhält man
pazität den Ausdruck:

$$C_0 = \frac{l}{2\frac{D}{R_1}} = \frac{lR_1}{2D}$$

$$C_0 = \frac{S}{4\pi D},$$

mit $S = 2\pi R_1 l$ die Fläche des betrachteten Teiles der Be-
eichnet.

ndensatoren aus zwei parallelen Belegungen gebildet, von denen en, die andere zylindrisch ist. Bezeichnen wir (Fig. 40) mit
r der Ebene, mit
vom Zentrum C
Radius $CR = r$
es Zylinders auf
ngsebene; es sei
tand der Achse
rs von der Ebene
ede parallel zur
Zylinders ge-
ngeneinheit sind
iden Belegungen
entgegengesetzte
$+\lambda$ und $-\lambda$
die Ladung auf
l einer der Be-
t $M = \lambda l$.
hten wir das
ches von zwei
setzt gleichen

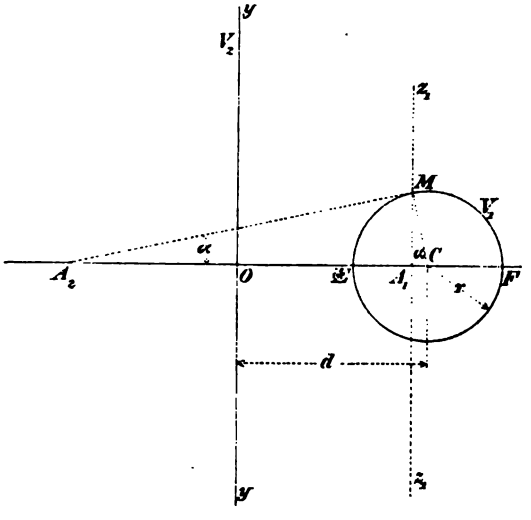


Fig. 40.

n von der Dichte $+\lambda$ und $-\lambda$ auf zwei zur Achse des Zy-
allelen Geraden erzeugt wird, deren Spuren A_1 und A_2 so
die Ebene yy und die zylindrische Fläche Niveauflächen sind;
ass der Mittelpunkt O der Geraden A_1A_2 sich auf der Ebene
, und dass sich im Punkte M, welcher auf dem Kreisumfang
A_1 zu A_1A_2 Senkrechten z_1z_1 bestimmt wird, die beiden Geraden
CM unter rechtem Winkel schneiden. Im Raume zwischen

der Ebene und der zylindrischen Fläche ist dieses Feld gl
welches von den beiden Verteilungen auf den Belegung
sators erzeugt wird; es sind daher in beiden Feldern
Potentials V_2 auf der Ebene und V_1 auf dem Zylinder ei
folglich können wir dieselben durch die allgemeine Bez

$$V = \text{Konst} + 2\lambda \log \frac{r_2}{r_1}$$

berechnen, worin r_2 und r_1 die Entfernungen eines be
Fläche von den Punkten A_2 und A_1 bedeuten.

Für die Ebene hat man $r_2 = r_1$, also

$$V_2 = \text{Konst.}$$

Für die zylindrische Fläche hat man

$$\frac{r_2}{r_1} = \frac{A_2 E}{A_1 E} = \frac{A_2 F}{A_1 F} = \frac{A_2 E + A_2 F}{A_1 E + A_1 F} =$$

Nun ist $A_2 C = 2d - A_1 C = 2d - r \sin \alpha$.

Winkel $\widehat{A_1 M C} = \widehat{C A_2 M}$ bezeichnet.

Man hat also $\frac{r_2}{r_1} = \frac{2d}{r} - \sin \alpha$, und folgli

$$V_1 = \text{Konst} + 2\lambda \log \left(\frac{2d}{r} -\right.$$

Wir haben so den Wert der Potentialdi
Belegungen des Kondensators

$$V_1 - V_2 = 2\lambda \log \left(\frac{2d}{r}\right.$$

und daher die Kapazität:

$$C_0 = \frac{M}{V_1 - V_2} = \frac{\quad}{2 \log}$$

Wenn der Radius r im Vergleiche
ist, kann man dafür, abkürzend, setzen:

15 $$C_0 = \frac{l}{2 \log}$$

Eine Luftleitung in der Nähe d
densator, dessen Belegungen der I
Fall kann man wie den obigen b
Radius r des Leiters immer klein
Erde ist, die Kapazität stets durch

4 *Kondensatoren, gebildet*
Achsen. Die beiden

vom
gen einen

pazität, welcher
sehr dünnem Di-
treffend ist, streng
geben, indem wir
unendlich dünnen
ensatoren aus vielen

einer der Belegungen
des Kondensators ge-
auf denselben ausübt.
als der elektro-

$$\ldots = \frac{V_1 - V_2}{D},$$

die Kraft:

Wert der Potentialdifferenz
S und des Ab-

ferenz
. Die
anische
essungen

rd Kelvin.

elektrischen Felde
wisse Energiemenge
n der Kraft und der
ment abhängt.
nergie muss, wenn das
ken, welche eine Arbeit
niebung entgegengesetzten
nicht, welcher Art that-
schiebung sind; dies ist aber
ssere Kraft notwendig ist; der
Felde aufgespeicherte Energie.
, in welchen durch eine äussere

entdecktes Gesetz, dass zwischen
oder gebrachten Körpern von ver-
nz entsteht; durch die Berührungs-
nämlich eine elektrische Verschiebung
t negativer, der andere mit positiver
kann auch die Elektrisierung durch
ll von Elektrisierung durch Kontakt

wendigerweise durch einen Aufwand an
diese Arbeit von intermolekularen oder
t denken, welche an der Trennungsfläche
bung, d. h. vom negativen zum positiven

bung hängt von der Grösse dieser Kräfte ab.
heinung, wie Volta behauptete, bei der ein-

die Masseinheiten.

oder:

(16) $$C_0 = \frac{l}{4 \log \frac{D}{r}}.$$

Die parallelen Hin- und Rückleiter einer elektrischen wirklichen in der Praxis den betrachteten Fall. Der Radius Leiter ist immer sehr klein im Vergleiche zu ihrer Entfer wird daher die Formel (16) bei der Berechnung der K Leitungen anwenden können.

5. *Ebene Kondensatoren.* Die Kapazität eines F Inhalt S eines ebenen Kondensators, in welchem die Abstand D besitzen, ist, wie wir gesehen haben [44]:

(17) $$C_0 = \frac{S}{4\pi D}.$$

Für den Plattenkondensator ist der Ausdruck der für den sphärischen und für den zylindrischen, m elektrikum versehenen Kondensator nur angenähert richtig. Darüber können wir uns leicht Rechenschaft beachten, dass eigentlich die Voraussetzung ein Dielektrikums so viel heisst, als sich die Kon kleinen, ebenen Kondensatoren gebildet zu denken.

In einem Kondensator kann man einen Teil beweglich machen und die stets nach dem Innere richtete Kraft messen, welche das elektrische Fel Die Kraft auf die Flächeneinheit ist nichts statische Druck p.

Wenn man nun bedenkt, dass

$$p = 2\pi\sigma^2, \quad \sigma = \frac{f}{4\pi} \quad \text{und} \quad f =$$

so hat man

$$p = \frac{1}{8\pi}\left(\frac{V_1 - V_2}{D}\right)^2$$

Auf einem Teil vom Flächeninhalte S i

$$F = pS = \frac{S}{8\pi}\left(\frac{V_1 -}{D}\right.$$

Aus dieser Beziehung kann man de $V_1 - V_2$ als Funktion der Kraft F, des standes D ermitteln:

(18) $$V_1 - V_2 = D \sqrt{}$$

fachen Berührung zwischen zwei verschiedenen Metallen auftritt, unter welchen keine chemischen Reaktionen stattfinden und nur molekulare Kräfte von Adhäsion und Kohäsion wirken; aber die Potendialdifferenz die unter ihnen entsteht, ist sehr klein, viel kleiner als Volta vermutete.

Der Wert der Verschiebung nimmt zu, wenn unter den beiden Körpern interatomische Kräfte von chemischer Affinität im Spiel sind. So entsteht bei dem Kontakt Metall-Luft eine viel grössere Potentialdifferenz als bei dem einfachen Kontakt zwischen zwei Metallen. Das Metall ladet sich in Kontakt mit der Luft mit negativer Elektrizität, es nimmt ein kleineres Potential an; die Potentialdifferenz ist um so grösser, je leichter sich das Metall oxydiert. Für die genaue Auffassung der klassischen Versuche Voltas muss man nicht nur die Wirkungen zwischen den beiden Metallen, sondern auch die Wirkungen zwischen jedem von ihnen und der Luft in Betracht ziehen; Volta schrieb der Potentialdifferenz zwischen den beiden Metallen einen grösseren als den thatsächlichen Wert zu, gerade deswegen, weil er die Kontakte Metall-Luft vernachlässigte.

Erwähnen wir die von Lord Kelvin angewandte Anordnung, um das Grundexperiment Voltas zu wiederholen, und die Erklärung, die er davon giebt.

Zwei zum Halbkreis gebogene Stäbe, wovon der eine aus Kupfer, der andere aus Zink besteht, sind an einem Ende M (Fig. 42), in Berührung gehalten oder zusammengelötet; die anderen Enden liegen einander gegenüber und lassen zwischen sich einen Raum, in dem sich ein um die Achse O leicht drehbares Blättchen A befindet. Wenn man dem Blättchen A eine starke positive Ladung erteilt, dreht es sich um einen kleinen Winkel, so dass es sich vom Zink entfernt und dem Kupfer nähert; man hat also in diesem Raum ein vom Zink zum Kupfer gerichtetes Feld.

Fig. 42.

Betrachten wir eine zum Blättchen A senkrechte Gerade XX; sie schneidet in P und Q die Flächen, welche Zink und Kupfer begrenzen.

Konstruieren wir das Diagramm der Potentiale (Fig. 43), indem wir senkrecht zu der Geraden XX in jedem ihrer Punkte als Ordinate den entsprechenden Wert des Potentials auftragen. Das Zink und das Kupfer in Berührung mit der Luft elektrisieren sich beide negativ, und da der Einfluss des Kontaktes Kupfer-Zink, wie gesagt, sehr klein ist, nehmen

e, merklich gleiche Potentiale V_{Zn}, V_{Cu} an. Die Luft nimmt in ten, die dem Zink und Kupfer nahe sind, die positiven Po- V_1 bezw. V_2 an, und eil das Zink leichter pfer oxydiert, $V_1 > V_2$. ft sinkt das Potential vom Punkte P zum Das Auftreten eines n Feldes zwischen Kupfer ist also we- er verschieden starken g der Luft auf die talle zu verdanken.

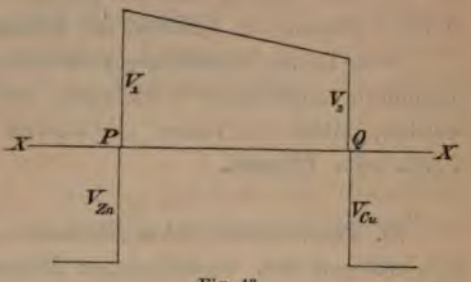


Fig. 43.

ydroelektrisches Element. — Die Potentialdifferenz, welche bei rung von Körpern aus verschiedener Materie entsteht, ist viel enn unter den Körpern nicht ein Vorgang, wie der einer lang- ydation an der Luft, sondern eine kräftigere chemische Reaktion ie z. B. diejenige zwischen einem Metall und einer dasselbe reifenden Säure; das Metall ladet sich immer negativ; sein ist um so kleiner, je mehr es von der Säure angegriffen wird. chten wir eine in (z. B. mit Schwefelsäure) angesäuertes Wasser Zinkplatte (Fig. 44). Um leichter in der Luft experimentieren , tauchen wir in die Flüssig- von ihr weniger angreifbare tallplatte, z. B. eine Kupfer- , und verlängern wir die tten in der Luft durch zwei und B aus Kupfer (*Rheo-* m den Einfluss der Kontakte nit den beiden verschiedenen zu vermeiden. Wir werden it der Kupferplatte verbun- ter B ein grösseres Potential m mit dem Zink verbun- iter A wahrnehmen. Die Differenz dieser beiden Potentiale gebraische Summe der in den verschiedenen Kontakten vor- Potentialdifferenzen. Und zwar hat die Flüssigkeit, welche gener Konduktor ist, in jedem ihrer Punkte dasselbe Po- ide Platten in Berührung mit der Flüssigkeit nehmen ein Potential als die Flüssigkeit an, ein erheblich kleineres jedoch

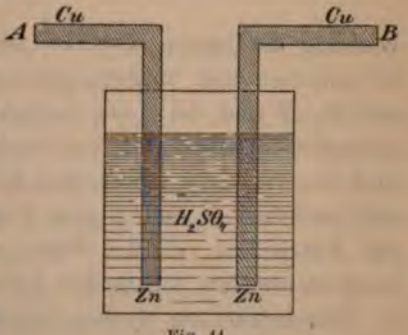


Fig. 44.

die Zinkplatte, da sie von der Säure sehr stark angegriffen wird; es fo
daher, dass das Zink ein kleineres Potential als das Kupfer besit
Zwischen den beiden Konduktoren B und A existiert ein elektrisches Fe
die in ihm aufgespeicherte Energie ist das Äquivalent der von d
Kräften chemischer Affinität zur Erzeugung des Feldes verrichteten Arb

Diese Zusammenstellung verschiedenartiger Konduktoren, welche, weg
besonderer chemischer Wirkungen, auf verschiedenen Potentialen gehal
werden, bildet in seiner einfachsten Gestalt ein *hydroelektrisches* o
Volta'sches Element.

49. Thermoelektrisches Element. — Wenn man in einem System v
Konduktoren aus verschiedener Materie die Berührungsstellen der e
zelnen das System bildenden Elemente auf verschiedenen Temperatu
hält, so entsteht an den Berührungsstellen eine elektrische Potenti
differenz, deren Grösse von der Höhe der Temperatur abhängig ist.

Um diese Thatsache zu konstatieren, betrachten wir ein solches Syst
von Konduktoren, bei welchem in normalem Zustande die Wirkungen
verschiedenen Kontakte die gleichen und entgegengesetzten sind, u
zwischen dessen Enden keine Potentialdifferenz vorhanden ist. Es beste
z. B. ein Stab aus drei aneinander gelöteten Konduktoren (Fig. 4
die beiden Endstücke A und B se
aus demselben, das mittlere C a
einem anderen Metalle. In normal

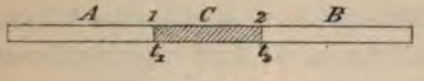


Fig. 45.

Zustande findet man zwischen A und
keine Potentialdifferenz, weil
Wirkung der beiden Kontakte zwischen C und A, A und der Luft, v
der gleichen und entgegengesetzten Wirkung der Kontakte zwischen
und B, B und der Luft, aufgehoben wird; wenn man aber die beid
Lötstellen dauernd auf verschiedenen Temperaturen t_1 und t_2 hält,
wird die Wirkung der beiden Kontakte 1 und 2 verschieden, und m
wird zwischen A und B eine Potentialdifferenz wahrnehmen, deren W
und Vorzeichen von der Natur der Körper und von der Differenz d
Temperaturen an den beiden Lötstellen abhängt.

Das betrachtete System bildet in seiner einfachsten Gestalt ein *therm
elektrisches Element*, dessen Prinzip von Seebeck entdeckt wurde.

50. Konduktoren, die sich in magnetischem Felde bewegen. —
den erwähnten Fällen entsteht die Potentialdifferenz durch die B
rührung zweier verschiedener Körper in den Berührungsflächen selb
scheinbar sprungweise den Übergang von einem Potentiale zum ande
nehmend; wahrscheinlich spielt sich der physikalische Vorgang allerdi

so ab, dass die Änderung des Potentials kontinuierlich geschieht, jedoch in einem so kleinen Raum, dass wir es nicht wahrnehmen können.

In anderen Fällen dagegen geschieht die Änderung des Potentials kontinuierlich längs eines ausgedehnten Teiles des Konduktors; die Potentialdifferenz zwischen den Enden des Konduktors ist die algebraische Summe der Differenzen, die in den einzelnen Elementen des betreffenden Konduktors vorhanden sind. Dies ist der Fall bei Leitern, die sich in magnetischen Feldern bewegen.

51. Elektromotorische Kraft. — Volta, welchem der Begriff des elektrischen Potentials noch nicht bekannt war, bezeichnete die Erscheinung der Elektrisierung durch Kontakt dadurch, dass er sagte, zwei sich berührende Körper besitzen verschiedene elektrische Spannungen; der Spannungsdifferenz gab er den Namen *Elektromotorische Kraft.* Diese Benennung, obwohl nicht sehr geeignet, wird auch heute noch angewandt, aber in ihrer Definition ersetzt man den unbestimmten Begriff der elektrischen Spannung durch den mathematisch und physikalisch gut definierten Begriff Potential.

Wenn zwischen zwei Punkten A und B eines und desselben Konduktors oder einer Reihe von miteinander verbundenen Konduktoren in dem elektrischen Gleichgewichtszustande eine Potentialdifferenz vorhanden ist, so sagt man, dass zwischen den beiden Punkten eine elektromotorische Kraft existiert, deren Wert gleich dem Werte der Potentialdifferenz ist

$$e = V_B - V_A,$$

*und deren positive Richtung vom Punkte A zum Punkte B, also von Stellen kleineren zu Stellen grösseren Potentials führt.**)

Die elektromotorische Kraft zwischen zwei Punkten eines Konduktors ist die algebraische Summe der E. M. KK., die zwischen diesen Punkten vorhanden sind, d. h. ist die Summe der Potentialdifferenzen, welche infolge einer der betrachteten Ursachen in der Aufeinanderfolge der die beiden Punkte verbindenden Konduktoren entstehen. So hat man in dem einfachen Volta-Element eine vom Zink zum Kupfer gerichtete E. M. K., die gleich der Differenz der entgegengesetzten E. M. KK. ist, die an den Trennungsflächen zwischen Flüssigkeit und Platten vorhanden sind.

Aus der Definition selbst ergiebt sich, dass eine E. M. K. eine Grösse von der Art der Potentiale, d. h. ein Kräfteintegral längs einer Linie, und keineswegs eine Kraft im eigentlichen Sinne dieses Wortes ist, weder

*) Wir werden allgemein die Abkürzung E. M. K. (in der Mehrzahl E. M. KK.) verwenden, um die elektromotorische Kraft zu bezeichnen.

eine mechanische noch eine elektrische. Dies muss man wohl im Au behalten, wenn man auch jene ungeeignete Benennung weiter verwend die von Volta in Zeiten, in welchen man mit dem Worte Kraft gross Missbrauch trieb, eingeführt wurde.

Weil die E. M. K. e zwischen zwei Punkten A und B (Fig. 46) dur die Potentialdifferenz zwischen diesen beid Punkten definiert ist, so kann man ihr imm folgenden Ausdruck geben:

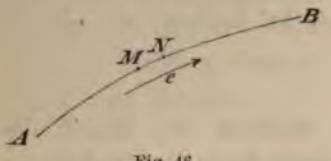


Fig. 46.

$$e = \int_{AB} \eta_s ds,$$

worin $\eta_s ds$ die E. M. K. auf einem Elem MN einer die beiden Punkte verbinden Linie AB, d. h. die Potentialdifferenz zwischen den beiden unendl nahen Punkten M und N bedeutet. In diesem Ausdrucke ist η eine Grö derselben Art wie die elektrischen Kräfte, und für sie wäre die Bezei nung E. M. K. geeignet. Doch ist der Brauch, diesen Namen der Gröss zu geben, so allgemein, dass wir, um keinen Irrtum hervorzuruf η die *auf die Längeneinheit bezogene E. M. K.* nennen werden.

Wir haben schon erwähnt, dass es, um eine elektrische Verschieb hervorzubringen, notwendig ist, eine Arbeit zu verrichten, welche äusseren Kräften geleistet wird; diese Kräfte sind eben durch die Kräft dargestellt, welche nur dort wirken, wo eine Ursache für eine elektris Verschiebung vorhanden ist.

Es ist notwendig, auf den Unterschied zu achten, der zwischen Kräften η und den elektrischen Kräften f besteht. Betrachten wir e Flussröhre, längs welcher, wie wir wissen, die Verschiebung solenoidi stattfindet; die Kraft η hat ihren Sitz nur dort, wo die speziellen, in vorigen Abschnitten erwähnten Bedingungen erfüllt sind; die elektris Kraft f ist in dem ganzen Teile der Röhre, der das Dielektrikum dur setzt, vorhanden und giebt eben das Mass der elastischen Gegenwirku welche das Dielektrikum der Verschiebung entgegensetzt; in den Stel dagegen, wo die Röhre durch die Konduktoren hindurchgeht, existie diese Gegenwirkungen nicht.

Ein Vergleich aus der Mechanik wird die Deutung der Erschein erleichtern. Man denke sich einen starren Ring durch viele elastis Schnüre im Gleichgewicht erhalten. Eine in einem Punkte des Rin durch eine Kraft F erzeugte Verschiebung wird sich auf den gan Ring übertragen; dieser Verschiebung setzen die Schnüre elastische Re tionen entgegen. Die Kraft F ist den E. M. KK. η vergleichbar, währ die Gegenwirkungen der Schnüre die elektrischen Kräfte im Dielektrik darstellen.

52. Allgemeine Gleichgewichtsbedingungen. — In den früher betrachteten Feldern war die Gleichgewichtsbedingung die, dass alle Punkte eines und desselben Konduktors oder mehrerer sich berührenden Konduktoren dasselbe Potential hätten; in den zuletzt betrachteten Fällen dagegen müssen, damit Gleichgewicht besteht, in verschiedenen Punkten eines und desselben Konduktors verschiedene Potentiale herrschen. Und gerade, wenn zwischen zwei Punkten eines Konduktors eine E. M. K. vorhanden ist, so ist es für das Bestehen des Gleichgewichts notwendig, dass der Zustand der übrigen Teile des Feldes die Existenz einer Potentialdifferenz zwischen diesen Punkten gestattet, welche gleich der E. M. K. ist. Wenn nämlich zwischen zwei Punkten A und B (Fig. 46) eine E. M. K. e vorhanden ist, so muss für den Gleichgewichtszustand die Bedingung erfüllt sein

$$e = V_B - V_A,$$

welche uns zur Charakterisierung des Begriffs der E. M. K. diente.

Auf der Linie AB betrachten wir zwei in verschwindend kleiner Entfernung von einander gelegene Punkte M und N, zwischen welchen eine von M nach N gerichtete E. M. K. $\eta_s ds$ vorhanden ist. Bezeichnet V das Potential in M, so ist $V + dV$ der Wert des Potentials in N; für den Gleichgewichtszustand muss sein:

$$\eta_s ds = V_N - V_M = dV,$$

woraus

$$\eta_s = \frac{dV}{ds},$$

wobei η_s und dV dasselbe Vorzeichen haben; das Potential nimmt in der Richtung der Kraft η zu.

Die Thatsache, dass das Potential in diesem Falle von Punkt zu Punkt des Konduktors variiert, weist darauf hin, dass die elektrische Kraft im Innern des Konduktors selbst nicht Null ist, sondern in jedem seiner Punkte den Wert f besitzt, welcher durch die Beziehung

$$f_s = -\frac{dV}{ds}$$

definiert ist.

Damit das Feld im Gleichgewichtszustande sei, ist es also notwendig, dass in jedem Punkte und nach jeder Richtung die Bedingung

$$\eta_s = -f_s$$

oder, anders ausgedrückt:

$$F_s = \eta_s + f_s = 0$$

erfüllt wird, wobei man mit F den aus den beiden homogenen Vektoren η und f resultierenden Vektor bezeichnet.

Im Gleichgewichtszustande ist also in jedem Punkte des Konduktors die Resultierende der elektrischen Kraft f und der auf die Längeneinheit bezogenen E. M. K. η gleich Null.

In dem speziellen Falle, in welchem $\eta = 0$ ist, hat man auch $f = 0$ und folglich

$$V = \text{Konst.};$$

wir finden die bekannte Gleichgewichtsbedingung eines Feldes wieder, in dem keine E. M. KK. vorhanden sind.

Im Innern der Konduktoren treten im Gleichgewichtszustande elektrische Kräfte nur auf, wenn in ihnen E. M. KK. vorhanden sind; wenn aber keine E. M. K. existiert, ist notwendigerweise die elektrische Kraft auch gleich Null, weil diese in einem Konduktor, in welchem sich keine elastischen Reaktionen entwickeln, nicht von einer gleichen und entgegengesetzten Kraft im Gleichgewichte gehalten werden kann.

Wir müssen hier zwei Fälle unterscheiden, je nachdem die Vektorgrösse η im Innern der Konduktoren so verteilt ist, dass sie ein monodromes oder ein polydromes Potential besitzt.

Setzen wir zuerst voraus, dass η ein einwertiges Potential besitzt. Dies bedeutet, dass das Integral der Kraft η längs einer beliebigen Linie zwischen den beiden Punkten A und B (Fig. 47) konstant ist, d. h. dass das Integral längs einer beliebigen, geschlossenen, die beiden Punkte enthaltenden Linie $AMBNA$ gleich Null ist.

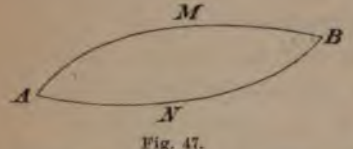


Fig. 47.

Wenn wir mit U das Potential von η bezeichnen, so haben wir nach der Definition

$$\eta_s = -\frac{dU}{ds},$$

und folglich, wenn man dies in die Gleichgewichtsgleichung einsetzt:

$$\frac{dV}{ds} = -\frac{dU}{ds}; \quad \frac{d(U+V)}{ds} = 0; \quad U + V = \text{Konst.}; \quad V = -U + \text{Konst.}$$

Für das Bestehen des Gleichgewichts ist es also nötig, dass in jedem Punkte das von der freien Elektrizität hervorgebrachte Potential V nur um eine Konstante von dem Werte des von den E. M. KK. herrührenden Potentials differiert und ferner, dass es das diesem entgegengesetzte Vorzeichen besitzt. Es existiert nun für jeden Wert von U immer eine Elektrizitätsverteilung, für welche diese Bedingung erfüllt werden kann. Wenn dies in einem gewissen Augenblicke nicht geschieht, so ist das Gleichgewicht nicht möglich, und man hat folglich eine Änderung der Verschiebung, durch welche eine Elektrizitätsverteilung hervorgebracht wird, die das Gleichgewicht herstellt. Jeder Änderung der Verteilung der

f die Längeneinheit bezogenen E. M. KK. η, deren Potential monodrom , entspricht eine Änderung der Verteilung der Elektrizität, durch elche das Gleichgewicht wieder hergestellt wird.

Betrachten wir ein besonderes Beispiel. Es seien in einem Konnsator die Belegungen A und B (Fig. 48) anfänglich durch einen aht aus demselben Metall verbunden, so dass das Ganze einen homonen Konduktor bildet, in dessen sämtlichen Punkten $\eta = 0$ ist.

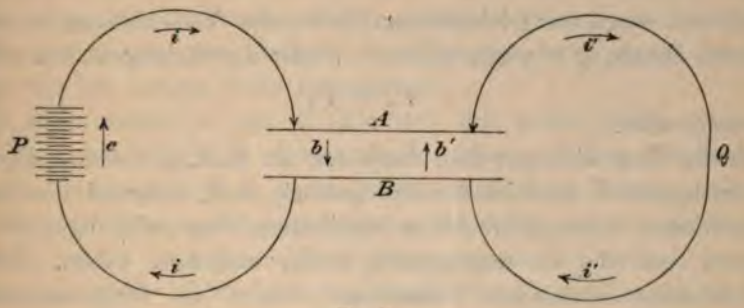


Fig. 48.

In diesem Falle besitzen die Kräfte η ein einwertiges Potential = Konst.; für den Gleichgewichtszustand ist es nötig, dass auch = Konst. sei, d. h.

$$V_A = V_B,$$

nn man mit V_A und V_B die Werte des Potentials auf den Belegungen zeichnet.

Wenn man die Verbindung der beiden Belegungen durch den Draht unterbricht und dieselbe durch einen ein Element oder allgemein eine nstante E. M. K. e enthaltenden Schliessungskreis P ersetzt, so hat n noch den Fall eines Konduktors, in dem der Vektor η ein einrtiges Potential besitzt, da die Potentialdifferenz zwischen den beiden len des Elements oder der Batterie konstant und gleich e ist. In sem Falle ist, wenn die Belegungen A und B bezw. mit dem positiven d negativen Pol des Elementes oder der Batterie verbunden sind, die eichgewichtsbedingung

$$V_A - V_B = e.$$

Da man ursprünglich $V_A = V_B$ hatte, ist in dem Moment, in welchem n die Verbindung durch den Schliessungskreis P herstellt, der Gleichwichtszustand nicht mehr möglich; es muss also durch das Dielektrikum Kondensators eine Verschiebung von A nach B in der Richtung b ttfinden, so dass zwischen A und B die gegebene Potentialdifferenz gestellt wird. Diese Verschiebung, die, wie wir wissen, solenoidisch

Im Gleichgewichtszustande ist also in ... auch durch den Schliessungs- die Resultierende der elektrischen Kraft ... Vorhandenseins der E. M. K. e bezogenen E. M. K. η gleich Null.

In dem speziellen Falle, in welchem ... der E. M. K. das Gleich- und folglich ... möglich; wir haben also

$$V = \text{Kon...}$$

wir finden die bekannte Gleichgewich... Schliessungskreis P aufhebt in dem keine E. M. KK. vorhanden sin..., so wird das Gleichgewicht

Im Innern der Konduktoren tre... eine Verschiebung in der un- trische Kräfte nur auf, wenn in ihn... die Gleichgewichtsbedingung aber keine E. M. K. existiert, ist no... auch gleich Null, weil diese in einen... elastischen Reaktionen entwickeln, n... der E. M. K. e notwendigerweise gesetzten Kraft im Gleichgewichte ... weil, während die von den

Wir müssen hier zwei Fälle ... chen Gegenwirkungen bestehen grösse η im Innern der Konduktor... Kräfte aufgehört haben. Die jetzt dromes oder ein polydromes Poten... werden die Deformationen des

Setzen wir zuerst voraus, d... das Dielektrikum eine Verschiebung Dies bedeutet, dass das Integral ... nach A gerichtet) hervorbringen, ... den Konduktor hindurch fortsetzt

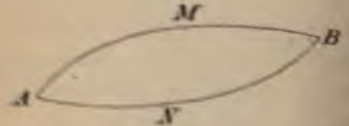


Fig. 47.

... Entladung des Kondensators.

... Analogie mit den elastischen Körpern ... angewendet haben, können wir einen ... deformierten elastischen Körper, die ... Kraft, die elektrische Verschiebung mit ... Kraft mit der elastischen Gegenwirkung ... Körper für einen gegebenen Wert ... bestimmten Wert annimmt, welchem das

von η bezeichnen, so haben ...

und folglich, wenn man die ... ...ormierenden Kraft und der elastischen

$$\frac{dV}{ds} = -\frac{dU}{ds}; \quad \frac{d(U+V)}{ds} = \ldots$$

... man auch im Kondensator für einen ge- ... bestimmten Wert der Verschiebung;

Für das Bestehen des ... Gegenwirkungen die eingetretenen De- Punkte das von der freien ... der deformierenden Kraft und stellen den ... um eine Konstante von d... Potentials differiert und ... zeichen besitzt. Es exis... Denken wir uns, dass die Kraft η ein Elektrizitätsverteilung, ... d. h. dass das Integral $\int_A^B \eta_s ds$ längs einer Wenn dies in einem ge... Gleichgewicht nicht m... Punkten A und B (Fig. 47) nicht nur Verschiebung, durch ... beiden Punkte A und B sei, sondern dass wird, die das Gleichgew... M selbst variiere.

Gleichgewicht muss in jedem Punkte die Beziehung

$$\eta_s = -f_s$$

die elektrische Kraft f, welche ihr Dasein Newton'schen ...rdankt, in jedem Punkte ein einwertiges Potential; nicht so ver... die Kraft η; es ist daher nicht möglich die Verteilungen der ...Kräfte η und f einander gleich zu machen und das Gleichgewicht ...fache Änderungen der Verschiebung herzustellen. Wir können ...von dem, was in diesem Falle geschehen muss, eine Vorstellung ..., indem wir das Beispiel des Kondensators wieder benützen, ...wir im vorigen Falle betrachteten.

Es seien wieder A und B (Fig. 48) die beiden Belegungen eines ...sators, welche man ebenso durch einen einfachen Konduktor Q, ...durch einen eine E. M. K. e enthaltenden Konduktor P verbinden kann. Stellen wir uns vor, dass die beiden Verbindungen zur gleichen Zeit ...gestellt werden; wir haben dann einen einzigen Konduktor, der einen ...schlossenen Kreis bildet. Für den Konduktor P, welcher die E. M. K. ...hält, gilt $\int_P \eta_s ds = e$, für den Konduktor Q dagegen $\int_Q \eta_s ds = 0$; man ...also für das auf den ganzen Schliessungskreis ausgedehnte Integral:

$$\int_{PQ} \eta_s ds = e.$$

Wenn der Schliessungskreis bei der Integration 2, 3, ··· mal durch...fen wird, so ist der Wert des Potentials $2e$, $3e$, ···, d. h. die Kraft η ...sitzt ein polydromes Potential. Hier ist das Gleichgewicht nicht ...hr möglich, weil die Bedingungen in Bezug auf die beiden Schliessungs...reise P und Q, nämlich $V_A - V_B = e$ und $V_A - V_B = 0$, gleichzeitig ...cht erfüllt werden können.

Wegen dieses Fehlens des Gleichgewichts haben wir eine neue Er...cheinung vor uns; um sie zu studieren, denken wir uns die beiden ...erbindungen abwechselnd sehr schnell nacheinander hergestellt und ...ieder aufgehoben, anstatt wie vorher gleichzeitig hergestellt. Wenn wir ...erbei die Zeitintervalle zwischen den einzelnen auszuführenden Hand...ungen verschwindend klein annehmen, so geht der jetzt angenommene ...all in den zuerst betrachteten Fall, wo beide Verbindungen dauernd ...estehen, über.

Denken wir uns also, wir öffnen den Kreis Q und schliessen den ...reis P; der Kondensator ladet sich, bis seine Belegungen eine Potential...ifferenz gleich e annehmen; es findet daher eine Verschiebung statt, ...elche im Dielektrikum die Richtung b und im Kreise die Richtung i ...esitzt. Wenn wir dagegen P öffnen und Q schliessen, entladet sich der

ist, findet nicht nur im Dielektrikum, sondern auch d… im …kreis P statt und geschieht eben infolge des Vorhand… …kreise …Wenn der Kondensator geladen ist, d. h. wenn m… …, deren …halten die Gegenwirkungen des Dielektrikums d… …Verschi… …gewicht, und es ist keine Verschiebung mehr m… …gleich, …einen Zustand stabilen Gleichgewichtes.

Wenn man die Verbindung durch den Schl… …esamten … und jene durch den Draht Q wiederherstellt, so …ffnen der b… …gestört, und durch das Dielektrikum findet ein… …den Fall, …gekehrten Richtung b' statt, wodurch wieder di… …dem geschloss…

$$V_A = V_B$$

…Durchgang … hergestellt wird.

In der That wird mit dem Aufhören der … Moment in … das Gleichgewicht im Dielektrikum gestört, …ändert, solang… Deformationen hervorgebrachten, elastische… …entgegengeri… …geblieben sind, die sie erzeugenden Kräfte …ators entspre… …frei wirkenden elastischen Reaktionen w… …vor sich geht … Mediums vernichten, indem sie durch das D… …folgen, und … (der vorigen entgegengesetzt von B nac… …die beiden Krei… …welche, weil solenoidisch, sich durch den … mehr, sich zu … …und ausgleicht. Darin besteht die Entlad… …den Belegungen …

Wenn wir auf diesen Fall die Analo… …einen bestimmten … ausdehnen, die wir schon mehrmals ang… …E. M. K. und die a… …geladenen Kondensator mit einem defo… …E. M. K. mit der deformierenden Kraft, …Gesagte kann … der Deformation, die elektrische Kraft … E. M. K. enthalt… …vergleichen. Wie in dem elastischen … …schliesst oder … der Kraft die Deformation einen besti… …eine Verschiebu… …Gleichgewicht zwischen der deform… …des Potentials; n… …Gegenwirkung entspricht, so hat ma… …änderungen im D… …gebenen Wert der E. M. K. einen … …Konduktoren geht … in beiden Fällen vernichten die … …formationen beim Verschwinden de… …kann in den … …früheren Zustand wieder her. …werden; eine …vollständig metalli…

53. Elektrischer Strom. — …vergleichbare … polydromes Potential besitzt, d…

…Verschiebung in den … beliebigen Linie zwi… …nennt *Richtung des S…* …eine Funktion der Lage der b… …nach welcher sich … es mit dem Variieren der Li…

ist eigentlich eine Erscheinung derselben Art,
der Ladung und Entladung der Kondensatoren
en Fällen einen *Momentanstrom* oder *Stromstoss*,
wirkungen des Dielektrikums aufhört, wenn das
ist. Wenn dagegen der Kreis vollständig
konstante E. M. K. enthält, so ist die Herstellung
uernd unmöglich; in dem ganzen Kreise findet
ung (*Gleichstrom*) statt; nach einer sehr kurzen
ein Beharrungszustand her, bei welchem die
renzen und der Verschiebungen an jeder Stelle

einen von elektrischem Strome durchflossenen
einem seiner Punkte P sei i die Richtung des
Flächeninhalt eines zu i senkrechten Flächenelementes.
sität des Stromes oder *Stromstärke durch das Ele-*
zitätsmenge dm, die in der Zeiteinheit durch das
. Das Verhältnis

$$u = \frac{dm}{dS}$$

im Punkte P genannt.
eine Vektorgrösse, die in jedem Punkte die Rich-
hat; ihr Fluss durch eine beliebige Fläche S

$$i = \int_S u dS$$

zitätsmenge aus, welche in der Zeiteinheit durch die
geht, und heisst *Intensität des Stromes durch die Fläche S.*
rschiebung solenoidische Verteilung besitzt, so ist auch
u, welche die auf die Zeiteinheit bezogene Grösse der
drückt, solenoidisch verteilt. Wenn es sich um einen
delt, so verlaufen sämtliche Flussröhren innerhalb des
reises, und es hat der Fluss des Vektors u, d. h. die
in einer bestimmten Zeit denselben Wert durch jeden
des Stromkreises; ferner, da in jedem Punkte die Ver-
und die Dichte konstant bleiben, so bleibt auch die Strom-
reise konstant.
man dagegen einen Stromstoss betrachtet, so finden wir,
dessen Wirkungen auch in das Dielektrikum hinein erstrecken,
variiert die Stromstärke durch einen gegebenen Schnitt
eit und in einem gegebenen Moment von Schnitt zu Schnitt
ktors.

Kondensator und bringt eine Verschiebung hervor, welche
trikum die zu b entgegengesetzte Richtung b', und im K
Richtung i' besitzt. Die beiden Verschiebungen b und b'
kungen sich gegenseitig aufheben, sind gleich, und da die
solenoidisch ist, so sind auch die beiden i und i' einander
Richtungen in dem Kreise $APBQA$ übereinstimmen; so
sagen, dass eine und dieselbe Elektrizitätsmenge diesen
durchflossen hat. Dies findet bei jedem Schliessen und
Verbindungen statt; man wird also als den Grenzwert
die beiden Verbindungen gleichzeitig hergestellt sind, in
metallischen Kreise $APBQA$ einen kontinuierlichen
Elektrizität in der Richtung ii' wahrnehmen. Der
ist der Wert der Verschiebung in einem bestimmten
Querschnitte des Konduktors derselbe und bleibt un
E. M. K. nicht variiert. Im Dielektrikum dagegen hat
Verschiebungen, der Ladung und Entladung des Kon
solange das Öffnen und Schliessen der Kreise lang
wenn das Öffnen und Schliessen einander sehr
mehr, wenn man den Grenzfall betrachtet, in d
schlossen sind, so hat der Kondensator keine
und zu entladen, die Potentialdifferenz zwi
folglich die Verschiebung im Dielektrikum ni
an, welcher so lange konstant bleibt, als d
Zustände des Kreises unverändert bleiben.

Das für den besonderen, vorher betrach
Weiteres auf jeden geschlossenen, metalli
Kreis ausgedehnt werden. Nur wenn ma
oder allgemein, wenn die E. M. K. vari
Dielektrikum statt, und ändert sich die V
bleibt diese Verteilung konstant, und
trikum nicht mehr statt; nur im I
stetige und konstante Verschiebung v

Eine mit der Zeit veränderliche
duktoren und in dem Dielektrikum
tinuierliche Verschiebung kann nu
Kreise, d. h. in einem elastischen
wirkungen nicht bietenden Kreise s

Eine solche kontinuierliche el
duktoren nennt man *elektrischen* St
diejenige der Verschiebung, d. h
positiven Elektrizitätsmengen ver

54. Ob
Studium d
Wenn in
Dichte *u*
wird man
die Potent
Behandlun
Punkte di
Wir habe
gewicht b
die Grösse
eine Funk
kennen w
dieses Abh
lich ergieb
gelten, un
kann. W
Ausdruck
der experi
meinen Be
Der al

In jed
hat die Die
E. M. K. η
ist dem Te

Wenn
und von d
hängt, so g

Wenn
von *u*

I. Die E. M. K., die den Strom verursacht, liege ausserhalb des beachteten Teiles des Stromkreises, es sei nämlich in diesem keine E. M. K. vorhanden; dann ist $e = 0$, und daher

$$ri = V_A - V_B, \qquad i = \frac{V_A - V_B}{r}. \tag{20'}$$

In einem Teile einer Strombahn, in welchem keine E. M. K. vorhanden ist, ist die Stromstärke gleich dem Verhältnis zwischen der Potentialdifferenz der Endpunkte (d. h. dem Potentialabfall, welcher in ihm entsteht) und seinem Widerstand; der Strom hat die Richtung, nach welcher das Potential sinkt.

II. Die Punkte A und B fallen zusammen, es handle sich nämlich um einen geschlossenen Stromkreis; dann ist $V_A = V_B$ und folglich

$$e = ri, \qquad i = \frac{e}{r}. \tag{20''}$$

In einem gegebenen, geschlossenen Stromkreise hat der Strom dieselbe Richtung wie die E. M. K., und seine Stärke kommt dem Werte des Verhältnisses der E. M. K. zum gesamten Widerstand des Stromkreises gleich.

Man kann in einem geschlossenen Kreise keinen Strom erzeugen, ohne dass in ihm eine E. M. K. wirkt.

Die Beziehungen (20') und (20'') wurden ausgesprochen und experimentell bewiesen von dem deutschen Physiker Ohm, welcher in seiner im Jahre 1827 herausgegebenen Abhandlung die Analogie hervorhebt, die zwischen dem elektrischen Strome und der Fortpflanzung der Wärme besteht, wenn man die Potentiale mit den Temperaturen und die in der Zeiteinheit übertragene Wärmemenge mit der Stromstärke vergleicht.

Andere Physiker nach Ohm prüften diese Beziehungen experimentell und fanden sie so genau zutreffend, dass man sie auch durch die Versuche als vollständig streng bewiesen annehmen kann.

Obwohl Ohm das allgemeine Gesetz (20) für einen beliebigen, fadenförmigen Konduktor nicht ausgesprochen hat, werden wir doch auch dieses allgemeinere Gesetz mit gutem Rechte als *Ohm'sches Gesetz* bezeichnen können, da man auf dasselbe leicht aus den zwei besonderen, von Ohm studierten Fällen kommen kann.

Die Thatsache, dass die Beziehungen (20') und (20''), die wir aus der Formel (19) abgeleitet haben, experimentell bestätigt sind, berechtigt uns, wie schon erwähnt, auch die allgemeine Beziehung (19), von der wir ausgegangen sind, als richtig anzunehmen.

...d das Potential in den
Reihe nach das Ohm'-

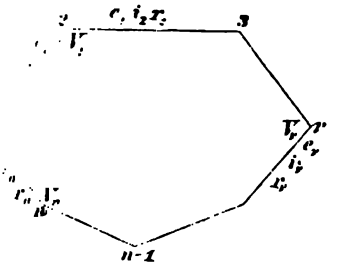


Fig. 51.

... aufheben, bekommt man die

...

...darstellt.

...leichstrom durchflossener Leiter ist ... Stromstärken in den einzelnen ... und der entsprechenden Widerder E. M. KK., die in dem be...

...ist und man das erste Gesetz auf ...nkten, das zweite auf eine passende ...im Netze gebildeten Polygonen an...ende Anzahl von linearen Gleichungen ...ten zu ermitteln. Man hat dabei den ...ungen zu erhalten.

... befinde sich im Punkte P (Fig. 52) ...pparat, der eine konstante E. M. K. e zwei Rheophoren aA und Bb in Verdurch mehrere mit den Widerständen r a verbunden sind, welche aber keine wir mit I die Intensität des Gesamtim unverzweigten Teile des Stromkreises, ...n Zweigstromes, d. h. die Stromstärke in ...n Leiter. Wenn die E. M. K. und folglich ...st, so haben alle i die Richtung AB.

Gegeben sind die E. M. K. e, der Widerstand R des unverzweigten Teiles des Stromkreises, die Widerstände r der einzelnen Zweige; wir nehmen uns vor, die Stromstärke I und die n Stromstärken i zu bestimmen.

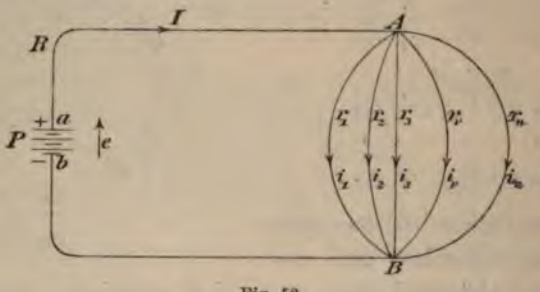


Fig. 52.

Der erste Kirchhoff'sche Satz, auf den Punkt A angewandt, giebt uns

$$I = \sum i.$$

Der zweite Satz, auf jeden einzelnen der n geschlossenen Stromkreise, welche wie $BPArB$ von dem unverzweigten Teile des Stromkreises und einem Zweige gebildet sind, angewandt, giebt uns n Gleichungen von der Form $e = RI + ri$, d. h.

$$i = \frac{e - RI}{r}. \tag{24}$$

Durch gliedweise Summation dieser n Gleichungen erhält man

$$I = \sum i = (e - RI) \sum \frac{1}{r},$$

woraus sich ergiebt:

$$I = \frac{e \sum \frac{1}{r}}{1 + R \sum \frac{1}{r}}, \quad I = \frac{e}{R + \frac{1}{\sum r}}. \tag{25}$$

Die Gleichung (24) kann in eine andere Form gebracht werden; wenn man in dieselben für $e - RI$ den Wert $\frac{I}{\sum \frac{1}{r}}$ einsetzt, erhält man

$$i = \frac{1}{r} \frac{I}{\sum \frac{1}{r}}. \tag{24'}$$

Man kann so die Werte der einzelnen i ausrechnen, indem man in die Gleichung (24) oder (24′) den aus der Gleichung (25) ermittelten Wert für I einsetzt, und auf diese Weise ist die Aufgabe vollständig gelöst.

Stellen wir einige allgemeine Betrachtungen über die Gleichungen (25) und (24′) an.

der Zusammensetzung ent-

K. des Elementes entgegen-
kt, so tritt die Zersetzung des
rom im Innern des Elementes
, eine positive Arbeit, die sich
von dem entwickelten Zink und
stellt ist.
Stromkreis betrachtet, so hat man

$$\int i$$

$$ei = 0;$$

leistete Arbeit ist Null, was eine not-
s von der Erhaltung der Energie ist.
Stromkreise ein Verschwinden von Energie
(Joule'scher Effekt), und es ist daher
nes notwendig, dass in dem Stromkreise
E. M. KK. wirkt, sodass die von den
Arbeit gleich der im Stromkreise verrichteten
von einem Element und einem einfachen
bildet ist, leisten die Kräfte chemischer Affinität
in ihm stattfindenden chemischen Reaktionen
infolge der Wirkung des Stromes entwickelt
sprechende Wärme nicht nur in dem Bade, in
Reaktion stattfindet, sondern sie verteilt sich in
des Stromkreises, proportional zu den Wider-

omkreise ausser dem Joule'schen Effekt noch
sche Arbeit geleistet, so können wir von vorn
da, wo solche Arbeiten geleistet werden, E. M. KK.
die dem Strome entgegengerichtet sind; von der
leteten chemischen Arbeit entwickelt sich nur ein
rend der andere Teil sich unter der Form von
nkreise zeigt; es besteht aber immer die Beziehung
allgebraische Summe der im Stromkreise wirkenden

lten Betrachtungen gestatten uns das folgende, all-
stellen, das in jedem Falle von der Erfahrung be-

Die in der Zeiteinheit in einem von konstantem Strome durchflossenen Leiter erzeugte Wärmemenge ist dem Widerstand des Leiters und dem Quadrat der Stromstärke proportional.

Dieses Gesetz wurde von uns aus dem Ohm'schen abgeleitet, wir hätten aber auch von dem Joule'schen Gesetz ausgehen und das Ohm'sche ermitteln können. Die beiden Gesetze bedingen sich gegenseitig.

Zwischen den verschiedenen Punkten eines vom Strome durchflossenen Konduktors sind Potentialdifferenzen vorhanden, er ist also Sitz eines elektrischen Feldes. Während jedoch im Dielektrikum das Feld ohne weiteren Aufwand an Arbeit fortbesteht, nachdem die Verschiebung stattgefunden hat, bleibt im Konduktor dagegen das Feld nur so lange erhalten, als der Strom fortdauert; um es fortbestehen zu lassen, muss man eine gewisse Arbeit verrichten, die in Wärme umgesetzt wird. Auf diese Weise wird die Faraday'sche Anschauungsweise, nach welcher einem Konduktor elektrisch-negative Eigenschaften zukommen, immer verständlicher.

58. Beziehung zwischen Arbeit und elektromotorischer Kraft. – Der Posten $(-ei)$ in dem Ausdrucke (27') hängt ausschliesslich von der Stromstärke und von der E. M. K. ab, es liegt also die Annahme nahe, dass die durch ihn dargestellte Arbeit ihren Sitz dort habe, wo die E. M. K. existiert. Diese Arbeit ist positiv, d. h. wirklich vom Strome geleistet und nach aussen verwendbar, wenn die E. M. K. negativ, dem Strome entgegengerichtet ist, d. h. wenn innerhalb des Apparats, in welchem die E. M. K. ihren Ursprung nimmt, der Strom von einem Punkte grösseren zu einem solchen kleineren Potentials fliesst; sie ist dagegen negativ, von äusseren Kräften geleistet, wenn die E. K. M. positiv, also wie der Strom gerichtet ist.

Diese unsere Voraussetzungen werden von der Erfahrung bestätigt.

Betrachten wir z. B. den Fall eines einfachen Voltaelementes. Denken wir uns vorerst, dass dasselbe von einem Strom in der Richtung der E. M. K., d. h. in der Richtung des Stromes, den das Element zu erzeugen sucht, durchflossen sei; in diesem Falle ist die vom Strome in dem Element geleistete Arbeit $(-ei)$ negativ, sie stellt einen Aufwand an Energie dar. In der That finden bei dem Fliessen des Stromes in dem Element chemische Veränderungen statt, durch die sich Zinksulfat bildet; dies ist aber eine Reaktion, welche von Wärmeentwickelung begleitet ist, d. h. sie geht auf Kosten einer von den interatomischen Kräften chemischer Affinität geleisteten Arbeit vor sich; Zink und Schwefelsäure getrennt

In jedem Teile eines Stromkreises, in welchem eine Stromstärke i und eine E. M. K. e herrschen, wird eine Arbeit $w = ei$ verrichtet; wenn e und i dieselbe Richtung haben, ist diese Arbeit von äusseren Kräften geleistet und wirkt zur Erzeugung des Stromes mit; wenn e und i einander entgegengerichtet sind, so ist die Arbeit vom Strome geleistet und ausserhalb verwendbar.

Umgekehrt:

Jeder Apparat, in welchem durch Aufwand einer Arbeit w ein Strom i erzeugt wird oder durch einen Strom i eine Arbeit w, welche sich nicht durch eine einfache Wärmeerzeugung, den Joule'schen Effekt, äussert, geleistet wird, ist Sitz einer E. M. K. $e = \frac{w}{i}$, *welche im ersten Falle dem Strome gleich, im zweiten Falle demselben entgegengesetzt gerichtet ist.*

59. Chemische Arbeit. Gesetze von Faraday und Becquerel. — Wenn ein Strom eine zersetzbare Flüssigkeit durchfliesst, so zerlegt er dieselbe. Dieses Phänomen wird *Elektrolyse* genannt, die Flüssigkeit, welche zerlegt wird, heisst *Elektrolyt;* den Behälter, in welchem diese Zersetzung stattfindet, nennt man *Zersetzungszelle* oder *Voltameter*, weil er, wie wir sehen werden, zum Messen elektrischer Gleichströme verwendet werden kann.

In den Elektrolyt sind zwei metallische Platten oder Drähte, die *Elektroden*, eingetaucht, welche den Zweck haben, mittels geeigneter Rheophoren das Voltameter in den Stromkreis einzuschalten. Die Elektrode, durch welche der Strom in die Flüssigkeit eintritt, heisst *Anode*, die, durch welche er austritt, *Kathode*.

Die beiden Körper, in welche sich der Elektrolyt zerlegt, zeigen sich nur auf der Oberfläche der Elektroden und heissen *Ionten;* und zwar heisst *Anion* der nach der Anode und *Kation* der nach der Kathode wandernde Körper.*)

*) Die Ausdrücke *Elektrolyse, Elektrolyt, Elektrode, Anode, Kathode, Ion, Anion, Kation* sind von Faraday eingeführt worden und entstammen, wie die Mehrzahl der von Faraday neu eingeführten Ausdrücke, dem Griechischen. Von der Abstammung des Stammes Elektro- von τὸ ἤλεκτρον = Bernstein ist schon oben die Rede gewesen; ἡ λῦσις = die Lösung; τὸ λυτόν = das Gelöste; ἡ ὁδός = der Weg, die Bahn. Die Begriffe ἡ ἄνοδος = der aufwärtsführende Weg, ἡ κάθοδος = der abwärtsführende Weg, sind zu ihrer vorliegenden Bedeutung gekommen in Anlehnung an die Anschauung der alten Griechen, dass der Seeweg vom Lande ins Meer in die Höhe führe (vergl. auch unsere Ausdrucksweise: „auf die hohe See"), und umgekehrt, vom Meere aufs Land abwärts. So heisst denn auch Anion (τὸ ἄνιον) und Kation (τὸ κάτιον) das nach der betr. Elektrode hin wandernde Ion (von τὸ ἰόν, Gen. ἰόντος, Plur. τὰ ἰόντα). Diese Herleitung der Worte aus dem Griechischen bedingt es, dass man folgerichtig Kation ohne h, Kathode mit h zu schreiben und den Plural von Ion zu bilden hat: Ionten.

Im allgemeinen können wir sagen, dass bei der Elektrolyse einer Säure der Wasserstoff Kation, das Metalloid oder die Gruppe, welche in der Säure mit dem Wasserstoff zusammengesetzt war, Anion ist; in der Elektrolyse eines Salzes ist das Metall, welches den Wasserstoff in der Säure ersetzte, die an der Bildung des Salzes beteiligt war, Kation, und das Säure-Radikal selbst Anion. Die Ionten, die auf diese Weise entstehen, können, wenn es Gase sind, sich frei entwickeln oder sich, wenn es feste Körper sind, auf die Oberfläche der Elektroden niederlegen; es kommt aber oft vor, dass dieselben, ihrer chemischen Eigenschaften zufolge, nicht in freiem Zustande bleiben können; dann müssen sie in neue chemische Verbindungen mit der Flüssigkeit oder mit den Elektroden eintreten. Wenn der Elektrolyt z. B. verdünnte Schwefelsäre (H_2SO_4) ist, so ist H_2 Kation, das Radikal SO_4 Anion; letzteres verbindet sich mit der Anode, wenn diese angreifbar ist, und bildet das entsprechende Sulfat, wirkt dagegen auf das Wasser zurück, wenn die Anode sich nicht angreifen lässt, und bildet die Schwefelsäure wieder, während der freiwerdende Sauerstoff sich an der Anode entwickelt. Auf diese Weise geht die Elektrolyse des mit Schwefelsäure angesäuerten Wassers vor sich, wobei die Schwefelsäure gewissermassen eine aktive, das Wasser aber die passive Rolle spielt.

Für die elektrolytischen Vorgänge gelten folgende, von Faraday festgelegte, quantitative Gesetze:

Die Menge des sich zersetzenden Elektrolyts oder die des sich abscheidenden Ions ist der durch das Voltameter hindurchgehenden Elektrizitätsmenge direkt proportional.

Wenn die Stromstärke konstant ist, so ist diese Menge des Elektrolyts oder Ions der Stromstärke und der Zeit, während welcher der Strom fliesst, proportional.

Die Menge der verschiedenen durch eine und dieselbe Elektrizitätsmenge zersetzten Elektrolyten oder der abgeschiedenen Ionten sind ihren chemischen Äquivalenten proportional.

Man pflegt mit dem Namen *elektrochemisches Äquivalent* einer gegebenen Substanz diejenige Masse*) derselben zu bezeichnen, welche durch die Elektrizitätsmenge *Eins* abgeschieden wird. Es ist dies eine für jeden Körper vollständig bestimmte Grösse.

*) Masse hier nicht in dem allgemeinen Sinne als Gegenstand, auf welche ein beliebiges Agens wirkt, verstanden, sondern als schwere Masse, d. h. der Gravitation unterworfene Masse. Nicht selten wird dieser Begriff im gewöhnlichen Sprachgebrauch, freilich fälschlicherweise, „Gewicht" genannt.

Wenn wir das chemische Äquivalent des Wasserstoffes, wie es in der Chemie üblich ist, als Einheit wählen und das elektrochemische Äquivalent desselben mit α bezeichnen, so ist das elektrochemische Äquivalent a eines Körpers, dessen chemisches Äquivalent A ist,

$$a = \alpha A. \tag{28}$$

Wenn man Körper zu betrachten hat, welche sich in verschiedenen Verhältnissen zusammensetzen und dadurch verschiedene Körper bilden können, genügen die Faraday'schen Gesetze nicht mehr, weil dieselben uns nicht sagen, ob eine und dieselbe Elektrizitätsmenge in den verschiedenen Körpern gleiche Mengen von Anion oder Kation erzeugt. In diesen Fällen gilt ein drittes Gesetz, das wir Becquerel verdanken.

In verschiedenen, aus denselben Grundstoffen, aber in verschiedenen Verhältnissen zusammengesetzten Elektrolyten befreien gleiche Elektrizitätsmengen gleiche Massen des Anions.

Dies ist z. B. bei den Kupfer- und Eisenverbindungen der Fall. Sowohl bei den Oxyd- als auch bei den Oxydulsalzen dieser Metalle werden durch eine und dieselbe Elektrizitätsmenge gleiche Massen des Radikals abgeschieden; die Abscheidung des Kupfers bezw. des Eisens ist dagegen verschieden, und zwar verhalten sich die abgeschiedenen Massen in den beiden Klassen von Verbindungen beim ersteren Metall wie 1 : 2 und beim letzteren wie 2 : 3. Es ist für die beiden Verbindungsarten das elektrochemische Äquivalent des Metalls verschieden, während das elektrochemische Äquivalent des Radikals, des Anions, konstant ist.

Der Strom in einem Voltameter verrichtet immer Arbeit. In dem einfachsten Falle ist dies eine positive, thatsächlich von dem Strome geleistete Arbeit, die sich in die potentielle, von den abgeschiedenen Ionten dargestellte Energie umwandelt. Es kann aber auch sein, dass die gesamte Arbeit im Voltameter negativ ist; wenn die Ionten sekundäre chemische Reaktionen hervorbringen, so können letztere eine grössere als die zur Befreiung der Ionten verrichtete Arbeit entwickeln; man hat dann im Voltameter eine Arbeit auf Kosten von äusserer potentieller Energie.

Wenn das von uns festgesetzte [58] allgemeine Prinzip richtig ist, und w die in der Zeiteinheit im Voltameter verrichtete Arbeit bezeichnet, so muss dasselbe Sitz einer E. M. K.

$$e = \frac{w}{i} \tag{29}$$

sein, welche eine dem Strome entgegengesetzte Richtung besitzt, wenn w eine positive Arbeit ist, und welche dagegen mit dem Strome gleichgerichtet ist, wenn w eine negative, von aussen verrichtete Arbeit darstellt.

Der Ausdruck der E. M. K. kann in einer anderen Form geschrieben erden, die von Lord Kelvin herrührt. Bezeichnen wir mit a das elektro-emische Äquivalent irgend eines der Körper, welche an der Reaktion n Voltameter teilnehmen, mit q die für jede Masseneinheit des be-rachteten Körpers im Verlauf der chemischen Reaktionen entwickelte Wärmemenge.

In der Zeiteinheit nimmt an der Reaktion eine Masse ai des Körpers teil, und folglich wird eine Wärmemenge aiq erzeugt.

Wenn $\mathscr{A}$ das dynamische Äquivalent der Kalorie*) ist, so ist die Arbeit in der Zeiteinheit

$$w = \mathscr{A} aiq,$$

und folglich die E. M. K.

$$e = \mathscr{A} aq$$

oder nach der Formel (28)

$$e = \mathscr{A} \alpha A q.$$

Nun giebt uns Aq die für jedes chemische Äquivalent des betrach-teten Körpers erzeugte oder verzehrte Wärme; wenn wir sie mit Q be-eichnen, haben wir

29) $$e = \mathscr{A} \alpha Q.$$

Das Produkt $\mathscr{A}\alpha$ ist eine Konstante; die Grösse Q variiert dagegen on Fall zu Fall mit den betrachteten Körpern und muss experimentell estimmt werden. Berthelot hat den Wert von Q für eine grosse Anzahl on Körpern bestimmt.

Aus dem gefundenen Ausdruck ergiebt sich unmittelbar die wichtige hatsache, dass die E. M. K. unabhängig von der Form und den Dimen-onen der Apparate ist und ausschliesslich von der chemischen Natur r Körper, die an der Reaktion teilnehmen, abhängt.

Die Richtung der E. M. K. ist, wie man gesehen hat, von dem Vor-ichen der Arbeit und folglich auch von dem Vorzeichen der Grösse Q hängig. Wenn Q positiv ist, d. h. wenn im Voltameter ein Komplex n Reaktionen stattfindet, durch welche Wärme entwickelt wird, so hat an in dem Voltameter eine E. M. K., die die Richtung des Stromes be-zt. So wird sich z. B. wenn das Elektrolyt angesäuertes Wasser, die athode eine Kupferplatte und die Anode eine Zinkplatte ist, an der athode H_2, an der Anode das Radikal SO_4 entwickeln, welch letzteres e Platte angreift und $Zn SO_4$ bildet. Nun entwickelt sich bei solchen eaktionen, welche immer stattfinden, wenn man Zn in $H_2 SO_4$ eintaucht,

*) Gemeinhin: „mechanisches Wärmeäquivalent" genannt.

Wärme auf Kosten der chemischen, potentiellen Energie des Systems; die E. M. K. hat in diesem Falle die Richtung des Stromes. Ein Element ist also nichts Anderes als ein Voltameter, in welchem die Anode von der Flüssigkeit angegriffen wird.

Q ist dagegen negativ, wenn im Voltameter ein Komplex von Reaktionen stattfindet, welche nicht aus sich selbst erzeugt werden können, also nicht ohne den Aufwand an äusserer Arbeit, welche die chemische, potentielle Energie des Systems vermehrt und gleich der Arbeit ist, die sich entwickelt, wenn die entgegengesetzte Reaktion natürlicherweise vor sich geht. So ist z. B. in einem Voltameter mit angesäuertem Wasser und nicht angreifbaren Elektroden das Resultat der chemischen Reaktionen die Zersetzung des Wassers; dafür ist ein Arbeitsaufwand nötig, entsprechend der Wärme, die sich entwickelt, wenn sich die beiden Elemente wieder vereinigen. Wenn Q negativ ist (das ist im allgemeinen der Fall in Voltametern mit nicht angreifbaren Elektroden), so ist die E. M. K. e dem Strome entgegengerichtet.

Das Vorhandensein dieser E. M. K. kann als eine Folge der Absetzung der Ionten an den Elektroden aufgefasst werden. So setzen sich in dem Wasservoltameter mit Platinelektroden die sich entwickelnden Bestandteile des Wassers, Wasserstoff und Sauerstoff, an die Elektroden an; sie werden, ehe sie sich gasförmig entwickeln, an den Elektroden gewissermassen kondensiert, sie schliessen sich ihnen eng an. Man bezeichnet diese Erscheinung der Verdichtung von Gasen an den Oberflächen fester Körper, wie ihn vornehmlich der Wasserstoff zeigt, mit *Occlusion*. Mit der Veränderung der Kontaktflächen ändern sich auch die E. M. KK.

Wenn sich die Elektroden in solchem Zustände befinden, heissen sie *polarisiert;* der gesamte Vorgang wird *Polarisation* und die aus ihr folgende E. M. K. *elektromotorische Kraft der Polarisation* genannt.

Wenn diese E. M. K. eine Folge der Polarisation ist, so muss jene auch nach dem Aufhören des die Polarisation erzeugenden *primären* Stromes weiter fortbestehen, so lange die Elektroden sich polarisiert erhalten, und muss daher in einem einfachen, metallischen Kreise einen *sekundären* oder *Polarisationsstrom* hervorbringen, welcher im Inneren des Voltameters eine der Richtung des primären Stromes entgegengesetzte Richtung hat.

So lange der primäre Strom wirkt, hat man im Stromkreise zwei entgegengesetzte E. M. KK., die ursprüngliche E. M. K. E und die E. M. K. E_p der Polarisation; wenn r der Widerstand des Stromkreises ist, so ist die Intensität i des Stromes, der ihn durchfliesst, nach dem Ohm'schen Gesetze

$$i = \frac{E - E_p}{r} = I - I_p.$$

Die Stromstärke i kann also als Differenz einer Stromstärke $I = \frac{E}{r}$, ie von der ursprünglichen E. M. K., und einer solchen $E_p = \frac{I_p}{r}$, die on der E. M. K. der Polarisation hervorgebracht wird, angesehen werden; wenn man die E. M. K. E aufhebt, bleibt im Stromkreise nur der Strom I_p.

Der sekundäre Strom, welcher im Voltameter dem primären entgegengerichtet ist, bringt dort entgegengesetzte chemische Reaktionen hervor, in deren Folge die vorher durch die Wirkung des elektrischen Stromes geschiedenen und auf den Elektroden angehäuften Ionten sich wieder vereinigen; hierdurch wird die Polarisation vernichtet, und der Strom hört wieder auf.

Der primäre Strom verrichtet im Voltameter eine Arbeit, welche in Form chemischer Energie aufgespeichert und als elektrische Arbeit zurückgegeben wird, wenn man den sekundären Strom entnimmt.

Diese Erscheinungen finden im allgemeinen in jedem Voltameter, wohl in kleinem Massstabe, statt; sie zeigen sich erst, wenn der primäre Strom aufgehört hat, und haben kurze Dauer. In besonderen Fällen kann jedoch die Polarisation sehr gross sein und längere Zeit dauern; die Apparate, durch welche dies erreicht werden kann, und welche im allgemeinen aus Voltametern mit angesäuertem Wasser und Bleielektroden bestehen, nennt man in der Technik *Elektrizitätssammler* oder *Akkumulatoren*.

60. Hypothese von Grotthus. Allgemeiner Zusammenhang der elektrischen Erscheinungen. — Wir haben bemerkt, dass die Ionten bei der Elektrolyse sich nur auf der Oberfläche der Elektroden bemerkbar machen, ohne dass sich eine Bewegung im Inneren des Voltameters zeigt. Um diese Thatsache zu erklären, bedient man sich folgender, von Grotthus stammender Hypothese.

Fig. 53.

Sobald die beiden Elektroden in Verbindung mit den Rheophoren gesetzt worden sind, entsteht, wegen der Potentialdifferenz, die unter ihnen hervorgerufen wird, eine Orientierung der Molekeln, und zwar richtet sich jede von ihnen so, dass das Anion gegen die Anode und das Kation gegen die Kathode (Fig. 53) hinzeigt. Hierbei wird der Zusammenhalt innerhalb der einzelnen Molekeln gelockert. Das äusserste Anion und das äusserste Kation, die sich beide in un-

mittelbarer Nähe der Elektroden befinden, spalten sich ab und treten aus dem Elektrolyten aus. Die hierdurch verbleibenden Reste vereinigen sich mit den betr. Ionten der ihnen in der Strömungslinie zunächst liegenden Molekeln, und dieser Vorgang setzt sich längs jeder Strömungslinie durch die ganze Flüssigkeit hindurch fort, sodass nun wieder der gesamte Elektrolyt aus vollkommenen Molekeln besteht. Die so aufs Neue zusammengesetzten Molekeln richten sich auf dieselbe Weise wie die vorigen, und es wiederholen sich nun die soeben geschilderten Erscheinungen. Die Ionten wandern also von Molekel zu Molekel in successiven intermolekularen Wechseln und zeigen sich frei nur an der Oberfläche der Elektroden.

Indem man die Hypothese von Grotthus ausdehnt, kann man sich denken, dass in jeder Molekel das Kation positiv, das Anion negativ elektrisiert ist, und dass die Orientierung der Molekeln durch die Wirkung des Feldes auf diese Massen geschieht. Nach dieser Hypothese würde die Elektrizität durch direkte Übertragung mit dem entsprechenden Ion von der einen zur anderen Molekel übergehen.

Indem wir diese Hypothese mit dem Begriffe der Polarisation und Verschiebung vereinigen, können wir alle elektrischen Erscheinungen, die wir bis jetzt für die verschiedenen Körper erörtert haben, in einen übersichtlichen Zusammenhang bringen.

Man bringe zwischen zwei metallischen Platten A und C auf beliebige Weise eine Potentialdifferenz hervor, und es sei das Potential V_A der Platte A grösser als das Potential V_C der Platte C. Die erste Wirkung, die dadurch, welches auch die Beschaffenheit des zwischenliegenden Körpers sei, hervorgebracht wird, ist die Polarisation dieses Körpers. Wir können nun die Verschiebung, welcher die Polarisation ihre Entstehung verdankt, stets als eine besondere Orientierung der Molekeln auffassen, derart, dass jede der Molekeln an der Seite, die der positiven Platte A zugewendet ist, negativ und an der der negativen Platte C zugewendeten Seite positiv elektrisiert wird.

Die Wirkungen der Polarisation sind verschieden, je nach der Natur des zwischenliegenden Körpers. Wenn es sich um ein Dielektrikum handelt, entwickeln sich elastische Reaktionen, welche einer weiteren Verschiebung entgegenwirken; es bildet sich im Raume zwischen A und C ein elektrisches Feld, welches fortdauert, so lange Gleichgewicht zwischen den deformierenden Kräften und den elastischen Reaktionen besteht.

Wenn der Körper ein Leiter ist, findet ebenfalls die Polarisation statt, aber es entwickeln sich keine elastischen Reaktionen. Die Verschiebung der Elektrizität von der Platte A zur Platte C kann daher fortdauern, bis die beiden Platten auf dasselbe Potential gekommen sind;

so lange diese aber auf verschiedenem, konstantem Potential gehalten werden, findet zwischen A und C eine stetige Verschiebung statt, es besteht ein Gleichstrom.

Wenn endlich der Körper ein Elektrolyt ist, so findet, wie wir erwähnt haben, infolge der Polarisation die Trennung und die Wiederzusammensetzung der Molekeln statt, und die Elektrizität pflanzt sich von der einen zu der anderen Platte durch Konvektion mit den materiellen Teilchen des Körpers fort.

Diese Betrachtungen lassen sich unabhängig von jeder Hypothese über die Natur der Polarisation anstellen und dienen dazu, alle die beschriebenen Erscheinungen in organischem Zusammenhang darzustellen; es wäre aber gefährlich, auf weitere Betrachtungen in dieser Ideenordnung einzugehen und daraus Schlüsse über die Natur der Elektrizität oder über die Zusammensetzung der verschiedenen Körper ziehen zu wollen.

Drittes Kapitel.

Magnetismus.

§ 1.

Magnetische Kräfte. Magnetische Massen. Magnetische Felder.

61. Magnetische Körper. Magnete. Magnetismus. — Es ist bekannt, dass einige Körper die Eigenschaft besitzen oder erlangen können, Eisen und ähnliche Substanzen anzuziehen und von denselben angezogen zu werden. Diese Eigenschaft ist schon im Altertum wahrgenommen worden an einer bestimmten Verbindung von Eisen und Sauerstoff (Fe_3O_4), welche *in der Natur* als „Magneteisenstein" vorkommt.*) *Auf künstliche Weise* können diese Eigenschaft in hohem Grade erhalten: Eisen und Eisenverbindungen, vornehmlich Stahl; in geringerem Grade: Kobalt und Nickel und in noch geringerem Grade: Chrom.

Die Körper, welche die erwähnte Eigenschaft erwerben können, heissen *magnetisch;* diejenigen, welche dieselbe besitzen, nennt man *magnetisiert* oder *Magnete.*

Ohne auf Hypothesen über die Ursache der an den Magneten zu beobachtenden Erscheinungen einzugehen, d. h. ohne uns mit der Natur dieser Erscheinungen oder mit den besonderen Bedingungen, welchen die Körper im magnetisierten Zustande unterliegen, näher zu befassen, können wir dieser Ursache doch, um eine einfachere Ausdrucksweise zu gewinnen, einen Namen erteilen, und wollen wir im Folgenden zu diesem Zwecke das Wort *Magnetismus* gebrauchen. Adoptiert man diese Ausdrucksweise, so drückt man die Thatsache, dass ein Körper magnetisiert ist, auch dadurch aus, dass man sagt, er *besitzt Magnetismus.*

Nicht nur die oben namentlich erwähnten, sondern alle Körper, auch die Flüssigkeiten und die Gase, zeigen, dass auf sie gewisse Kräfte einwirken, sobald sie in die Nähe von Magneten gebracht werden.

---

*) An Stücken von Eisenerzen, welche aus Gruben in der Nähe der Stadt Magnesia in Kleinasien stammten (*Μαγνήτης* oder *Μαγνῆτις λίθος*) war diese Eigenschaft vornehmlich beobachtet worden, daher gab man ihr den Namen „Magnetismus".

In der Technik sind jedoch das Eisen und dessen Verbindungen mit Kohlenstoff, namentlich der Stahl, die einzigen in Betracht kommenden Körper.

Aus Stahl kann man Magnete herstellen, welche ihren Magnetismus sehr lange beibehalten können; durch passende Gestaltung dieser Magnete konnte man experimentell die Elementargesetze der magnetischen Erscheinungen erforschen. Um die wenigen Grundthatsachen, auf deren Kenntnis wir Wert legen müssen, aus den Versuchen herleiten und zusammenfassen zu können, werden wir uns im Folgenden auf einen prismatischen oder zylindrischen Magnetstab aus Stahl, dessen Querschnitt im Verhältnis zur Länge hinreichend klein ist, beziehen.

Legt man einen solchen Magnetstab in Eisenfeilicht, und zieht man ihn dann heraus, so haften an ihm Feilspäne in büschelförmiger oder strahlenförmiger Anordnung. Sofort fällt hierbei in die Augen, dass die Menge und die Länge dieser Büschel am grössten an den Enden, während die Mitte des Stabes frei von Feilspänen ist.

Wenn man ferner einen solchen Magnetstab einem an einem Faden aufgehängten Eisenstücke nähert, bemerkt man, dass die auf dieses Eisenstück ausgeübte Anziehung am grössten ist, wenn ihm das eine oder das andere Ende des Stabes genähert wird, dagegen unmerklich, wenn man nur den mittleren Teil des Stabes in die Nähe des Eisenstückes bringt. Wir schliessen daraus, dass die magnetischen Kraftwirkungen hauptsächlich von den Enden des Magneten ausgehen.

Aber die beiden Enden des Magneten verhalten sich nicht gleichartig. Wenn man nämlich den Magnetstab in seinem Schwerpunkt unterstützt, so dass er sich frei nach allen Richtungen hin einstellen kann, oder wenn man ihn an einem Faden so aufhängt, dass er horizontal schwebt und um die von dem Aufhängefaden bestimmte Vertikale frei beweglich ist, oder endlich, wenn man den Stab auf eine Spitze setzt, auf welcher er sich in der Horizontalebene drehen kann, so findet man, dass der Magnet nicht in jeder beliebigen Lage in Ruhe bleibt, sondern dass er sich stets in eine bestimmte Lage einstellt; bringt man den Magneten aus dieser Ruhelage, so kehrt er von selbst in dieselbe zurück. In dieser Lage ist der Magnet in stabilem Gleichgewichte; das eine von seinen Enden und zwar immer dasselbe ist nach Norden, das andere nach Süden gerichtet.*)

*) Die Richtung, in welche sich ein frei in horizontaler Ebene schwebender Magnetstab einstellt, ist allerdings nicht auf allen Punkten der Erdoberfläche dieselbe und variiert auch an demselben Orte mit der Zeit. In Europa ist sie jetzt im allgemeinen eine nordsüdliche, doch so, dass das nach Norden zeigende Ende etwas nach Westen hin abweicht.

Die beiden Enden des Magneten verhalten sich also verschieden; es ist somit angezeigt, dieselben durch verschiedene Namen zu unterscheiden; wir nennen sie das *Nordende* und das *Südende*, je nach dem Pol der Erde, nach welchem sie sich bei ihrer Einstellung richten. Wenn wir, wie vereinbart, die Ursache der magnetischen Erscheinungen Magnetismus nennen, so können wir auch das verschiedenartige Verhalten der beiden Enden dadurch zum Ausdruck bringen, dass wir sagen, sie besitzen zwei verschiedene Arten von Magnetismus; wir nennen *Nordmagnetismus* den des Nordendes, *Südmagnetismus* den des Südendes unseres Stabes.

Wenn ein Magnetstab so gelagert ist, dass er in einer Horizontalebene sich frei um seinen Mittelpunkt bewegen kann, und wenn einem seiner Enden das Ende eines anderen Magneten genähert wird, so kann man wahrnehmen, dass zwei Enden, wenn beide Nord- oder beide Südmagnetismus enthalten, sich abstossen, und zwei Enden, von denen das eine ein Süd- und das andere ein Nordende ist, sich anziehen. Man sagt von diesem gegenseitigen Verhalten: *die gleichnamigen Enden stossen einander ab, die ungleichnamigen ziehen sich an;* oder auch: *der Magnetismus einer Art stösst den derselben Art ab und zieht den der anderen Art an.*

Wenn ein Stück Eisen oder ein Stück einer anderen magnetischen Substanz einem Magneten genähert wird, so wird es dadurch ohne Weiteres magnetisiert, d. h. es wird nun selbst ein Magnet. Wenn beispielsweise N (Fig. 54) das Nordende eines Magneten ist und ihm ein Eisenstab sn genähert wird, so magnetisiert sich letzterer, und zwar zeigt sich Südmagnetismus an dem Ende s, das N näher liegt, und Nordmagnetismus an dem von N abgewendeten Ende n.

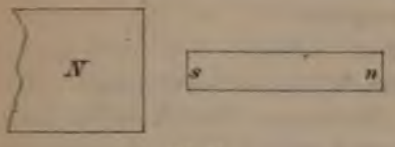


Fig. 54.

Diese Erscheinung wird als *magnetische Influenz* oder *Induktion* bezeichnet. Ein unmagnetischer Körper, welcher in die Nähe eines Magneten gebracht wird, zeigt diese Erscheinung aber nicht. Wir können hieraus erkennen, dass keine magnetischen Wirkungen zwischen zwei Körpern, welche nicht beide magnetisch sind, bestehen können.

62. Coulomb'sches Gesetz. Magnetische Massen. Magnetisches Feld. — Aus dem Gesagten geht hervor, dass die Untersuchung der Wirkung eines Magneten auf einen anderen im allgemeinen nicht einfach ist. Wenn man auch annimmt, dass die von einem Ende des einen auf ein Ende des anderen ausgeübten Kraftwirkungen auf eine Resultierende reduziert werden können, hat man doch immer noch vier solcher Kräfte zu betrachten. Verwendet man aber sehr dünne und lange Magnete, so

kann man die Enden, an welchen sich der Magnetismus befindet, als materielle Punkte ansehen und ferner durch gewisse Lagerung der Magnetstäbchen erzielen, dass die Wirkung eines Endes eines jeden Magneten so schwach im Vergleich zu der Wirkung der anderen Enden beider Magnete ist, dass erstere bei der Betrachtung vernachlässigt werden kann. Auf diese Weise gelang es Coulomb, die Kraft zwischen den Enden zweier Magnete zu untersuchen und wahrzunehmen, dass die magnetischen Kräfte Newton'sche Kräfte sind.

Wir können danach auf den Magnetismus alle die Betrachtungen übertragen, die wir allgemein für ein Agens, das sich durch Newton'sche Kräfte bemerklich macht, angestellt haben. Und vor allem können wir, ohne eine besondere Hypothese über die Natur des Magnetismus aufzustellen, von *Menge des Magnetismus* oder von *magnetischen Massen* reden und solche Massen als mathematisch bestimmte, durch die Kräfte, die auf sie wirken, messbare Grössen ansehen.

Wenn m und m' zwei in zwei Punkten in der Entfernung r von einander gelegene magnetische Massen sind, ist die Kraft F, die jede von ihnen auf die andere ausübt, durch die Coulomb'sche Formel

(1) $$F = k\frac{mm'}{r^2}$$

gegeben.

Um für die magnetischen Massen m zahlenmässige Angaben machen zu können, muss man die Masseinheit definieren. Die natürlichste und passendste Einheit ist diejenige, durch welche die hier erwähnte Coulomb'sche Formel die einfachste Form annimmt, d. i. diejenige, bei welcher die Konstante k in dem Medium, in welchem jene Kräfte beobachtet werden, d. h. in der atmosphärischen Luft (angenähert auch in einem beliebigen Gase und im Vakuum) gleich *Eins* gesetzt wird. In diesem Falle geht die Formel (1) über in die folgende:

$$F = \frac{mm'}{r^2}$$

und $m' = m$ angenommen, in

$$F = \frac{m^2}{r^2},$$

woraus folgt:

$$m = r\sqrt{F}.$$

Es erhellt daraus, dass m gleich *Eins* ist, wenn die Entfernung r und die Kraft F je gleich *Eins* sind; wir erhalten so folgende Definition:

Die Einheit der magnetischen Masse oder des Magnetismus ist diejenige Magnetismusmenge, welche auf eine gleichgrosse und gleichnamige, in der Entfernung Eins von ihr gelegene Menge die abstossende Kraft Eins ausübt.

Wir setzen ferner die Einheit einer magnetischen Masse gleich $+1$, wenn sie Nordmagnetismus enthält, und gleich -1, wenn sie Südmagnetismus enthält, infolgedessen wird man in allen Berechnungen, in welchen man die Coulomb'sche Formel verwendet, die nordmagnetischen Massen als positive und die südmagnetischen als negative Grössen behandeln. Hierbei ist noch zu bemerken, dass man in der Formel (1) die Kraft F als positiv oder als negativ betrachten muss, je nachdem sie eine abstossende oder eine anziehende Kraft ist, da zwei gleichnamige Massen einander abstossen und man den Faktor k als positiv vorausgesetzt hat.

Wenn in einem bestimmten Raume eine magnetische Masse einer Kraftwirkung ausgesetzt ist, so bildet jener Raum ein *magnetisches Feld*. Ist die magnetische Masse, die zur Untersuchung herangezogen wird, eine positive, d. h. nordmagnetische, so wird die *Richtung des magnetischen Feldes* in dem Punkte, in welchem die Masse gelegen ist, angegeben durch die Richtung der Kraft, welche an diesem Punkte wirksam ist. Eine südmagnetische Masse erfährt darnach einen Antrieb in der dem Felde entgegengesetzten Richtung.

Bringen wir in ein bestimmtes magnetisches Feld an einen bestimmten Punkt die Einheit der magnetischen Masse, so kann man dadurch die Stärke des magnetischen Feldes bestimmen: wir nennen die Intensität der in jenem Punkte auf die Einheit der magnetischen Masse wirkenden Kraft die *Feldstärke* oder die *magnetische Kraft* in dem betreffenden Punkte.

Diese Definitionen sind Anwendungen auf den besonderen Fall des Magnetismus von jenen, die wir allgemein für die Newton'schen Kraftfelder angegeben haben. Auch alle anderen Definitionen und bewiesenen Sätze für die Newton'schen Kräfte lassen sich ohne Weiteres auf den vorliegenden Fall anwenden; dementsprechend werden wir bei der Behandlung der magnetischen Felder von den Begriffen *Potential*, *Aquipotential* oder *Niveau*[illegible], *Kraftfluss*, *Kraftlinie* und *-röhre* Gebrauch machen. Ferner werden wir für die magnetischen Felder die Theoreme [illegible] und die daraus abgeleiteten Sätze direkt verwenden. [illegible] erwähnen, dass die Konstante k, die in allen [illegible] in diesem besonderen Falle, [illegible] Masseinheit getroffen haben, [illegible] haben wir zu bemerken, dass [illegible] die willkürliche Konstante [illegible] des Potentials er[illegible] sodass der Ausdruck des magne[illegible] sich auf

(2) $$V = \sum \frac{m}{r}$$

reduziert, wobei die Summe über alle Massen m des Feldes zu bilden ist.

Wenn alle Entfernungen r unendlich gross sind, so hat man $V = 0$. Es ergiebt sich daraus, dass die Integrationskonstante so gewählt worden ist, dass das Potential in den Punkten, welche von den Massen, die das Feld hervorbringen, unendlich weit entfernt liegen, verschwindend kleine Werte annimmt.

63. Gleichförmiges magnetisches Feld. Pole eines Magneten. — Ein magnetisches Feld heisst *gleichförmig*, wenn in ihm die magnetischen Kraftlinien parallele Gerade sind [16].

Wenn in einem gleichförmigen magnetischen Felde ein Magnet liegt, wirken auf alle Punkte desselben, in welchen nordmagnetische Massen vorhanden sind, Kräfte, die parallel sind und die Richtung des Feldes besitzen; ferner wirken auf die Punkte, in welchen sich südmagnetische Massen befinden, ebenfalls parallele, aber dem Felde entgegengerichtete Kräfte. Nun weiss man, dass die Resultierende eines Systems von parallelen, in den Punkten eines starren Körpers angreifenden Kräften der Grösse nach gleich der Summe aller komponierenden Kräfte und der Richtung nach zu diesen selbst parallel ist, und dass sie, einerlei welches die Lage des Körpers ist, immer durch einen Punkt geht, welcher *Mittelpunkt der parallelen Kräfte* genannt wird. Also ergeben die auf die einzelnen Nordmassen eines in einem gleichförmigen Felde gelegenen Magneten wirkenden Kräfte eine einzige Resultierende, welche gleich ihrer Summe ist und die Richtung des Feldes hat, und welche in einem in bezug auf den Magneten festen Punkte angreifend gedacht werden kann; in gleicher Weise kann man die auf die Südmassen wirkenden Kräfte auf eine dem Felde entgegengerichtete Resultierende zurückführen, die gleich ihrer Summe ist, und die in einem festen Punkte des Magneten angreifend gedacht wird.

Da wir aber sagen, dass ein Punkt Magnetismus enthält, um anzudeuten, dass an ihm eine magnetische Kraft angreift, und da wir uns dieser Kraft bedienen, um die Menge des Magnetismus, die in ihm vorhanden ist, zu definieren, können wir auch sagen, dass bei einem in einem gleichförmigen Felde befindlichen Magneten alle nordmagnetischen und ebenso alle südmagnetischen Massen je in einen einzigen Punkt konzentriert werden können. Diese beiden Punkte, die in bezug auf den Magneten solange eine feste Lage besitzen, als die Verteilung des Magnetismus auf demselben unverändert bleibt, und welche sich bei stabförmigen Magneten in der Nähe der Enden des Stabes befinden, heissen die *Pole*

der zweite der

den Felde auf
erende, wovon
die andere,

nicht gleich-
wirken, nicht
in dem
den Punkten
nik die Be-
nes Magneten

eben hat, sich
des Ortes ab-
ung von magne-
befinden wir
netisches Feld
Ausdehnung, in
ses Feld mit
tet uns das
Magneten zu
welche auf die
sind und ein
Magneten in die
ert ist, heben
auf.
en, so würden
Horizontal-
die Vertikal-
Stab, nachdem
besitzt. Die
Versuche nach-

en auf einer
Einstellung
Vorwärts-
besser kann

s ist, trifft nur
entfernt sind.

sselbe durch die in Fig. 55 gezeigte Anordnung nachweisen. Eine tale Scheibe D ist durch drei Fäden ab, ac, ad an dem vertikalen OO', um welchen sie sich frei drehen kann, befestigt. Die trägt einen kleinen Magneten ns, der in der Horizontalebene um itze, die ihm als Stütze dient, drehbar ist, und engewicht G, welches dazu dient, das Gewicht gneten und ihrer Stütze auszugleichen. Wird Magnet so auf die Scheibe gesetzt, dass die g, in welcher er sich orientiert, senkrecht zu tikalebene ist, die durch den Faden OO' und n Magneten als Stütze dienende Spitze be- wird, so würde, wenn die beiden Kräfte, welche beeinflussen, nicht gleich wären, ihre Diffe- n Drehmoment um die Achse OO' hervor- um welche sich die Scheibe D, der Torsions- s Fadens entgegen, drehen würde. Dadurch, ser Fall nicht eintritt, ist bewiesen, dass die oben erwähnten Kräfte einander gleich sind. s der Gleichheit der auf die beiden Pole des n wirkenden Kräfte ergiebt sich, dass die d südmagnetischen Massen, welche der Magnet numerisch gleich sind, d. h. dass ebensoviel gnetismus in dem Magneten vorhanden ist, wie netismus. Da wir nun die nordmagnetischen Massen als positive und die südmagnetischen Massen als negative Grössen unseren ungen zu Grunde legen, so folgt, dass *die gesamte Menge von smus, die ein Magnet enthält, stets gleich Null ist.*

Fig. 55.

diesem Satze sind wir dadurch gelangt, dass wir einen Mag- n einem gleichförmigen Felde betrachtet haben; dadurch aber wir im Magneten weder die Menge noch die Verteilung des smus verändert, infolgedessen ist unser Satz allgemein; er drückt undeigenschaft aller Magnete aus, unabhängig von dem Felde, in sie angenommen sind.

Magnetisches Moment. — Aus den vorigen Betrachtungen geht dass ein in einem gleichförmigen Felde befindlicher Magnet für kungen, die das Feld auf ihn ausübt, dieselbe Geltung hat, wie eiche, dem Vorzeichen nach entgegengesetzte magnetische Massen, in zwei miteinander starr verbundenen Punkten N und S kon- sind (Fig. 56). Die die Pole verbindende Gerade SN heisst *es Magneten*, der auf der Achse gemessene Abstand $l = SN$

heisst *Länge des Magneten* und die Richtung SNX der Achse vom Süd- zum Nordpol heisst *Richtung des Magneten*. Wenn m und $-m$ die entgegengesetzt gleichen, bezw. in dem Nord- und in dem Südpol konzentriert gedachten Massen sind, so wird das Produkt aus der Masse m und der Länge l *magnetisches Moment des Magneten* genannt. Wenn wir mit $\mathfrak{M}$ dieses Moment bezeichnen, haben wir der Definition nach

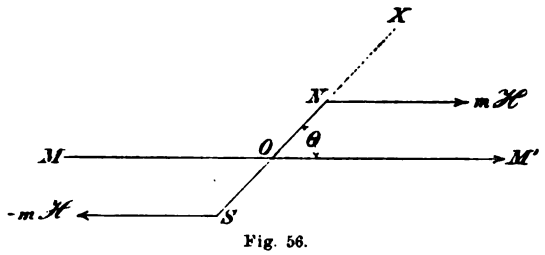


Fig. 56.

$$\mathfrak{M} = lm. \tag{3}$$

Wenn MM' die Richtung und $\mathscr{H}$ die Intensität des magnetischen Feldes ist, in welchem der Magnet sich befindet, so ist der Nordpol der Wirkung einer Kraft, deren Stärke gleich $m\mathscr{H}$ ist, ausgesetzt und erleidet einen Antrieb in der Richtung MM' des Feldes, während der Südpol durch eine gleiche und entgegengerichtete Kraft angezogen wird. Die beiden Kräfte bilden ein Kräftepaar, dessen Moment

$$\mathscr{H} ml \sin \Theta = \mathscr{H} \mathfrak{M} \sin \Theta$$

ist, wobei Θ den von der Richtung des Feldes und jener des Magneten gebildeten Winkel bezeichnet.

Für $\Theta = 90^0$ und $\mathscr{H} = 1$ hat dieses Moment den Wert $\mathfrak{M}$. Wir können daher folgende Definition des Momentes $\mathfrak{M}$ ableiten:

Das magnetische Moment eines Magneten ist das Moment des Kräftepaares, welches den Magneten angreift, wenn er sich in einem gleichförmigen Felde von der Stärke Eins senkrecht zur Richtung des Feldes befindet.

65. Magnetnadel. Untersuchung eines magnetischen Feldes. — Wenn der Magnet, von welchem wir soeben gesprochen, in seinem Schwerpunkt aufgehängt ist, sodass er sich frei im Raume drehen kann, so nimmt er unter der Wirkung der Kräfte des Feldes eine zum magnetischen Felde parallele Richtung an. Wenn dagegen der Magnet von einer Spitze getragen oder an einem Faden aufgehängt und passend ausbalanziert ist, sodass er horizontal bleibt, so kann er sich frei um eine vertikale Achse drehen, orientiert sich und bleibt in der Vertikalebene, die von seiner Drehungsachse und der Richtung des Feldes gebildet ist, in stabilem Gleichgewichte.

Einen sehr leichten Magneten, dessen Längenausdehnung gross ist gegen seine Breitenausdehnung, und der so aufgehängt ist, dass er seiner

Orientierung im Raume oder in einer Horizontalebene immer sehr geringen Widerstand entgegensetzt, nennt man gewöhnlich *Magnetnadel.*

Eine in die verschiedenen Punkte des Feldes gebrachte Magnetnadel kann zur Untersuchung des Feldes und zur Bestimmung der Richtung und Verteilung der Kraftlinien dienen.

So sehen wir, ohne uns mit den Bestimmungen in bezug auf das erdmagnetische Feld zu beschäftigen, doch die Möglichkeit, jenes Studium durchzuführen, und wir können uns darauf beschränken, folgende Definitionen zu erwähnen, von welchen wir später Gebrauch machen werden.

Magnetischer Meridian ist die Vertikalebene, welche die Richtung des erdmagnetischen Feldes enthält, d. h. jene Vertikalebene, in welche sich die im erdmagnetischen Felde frei drehbare Magnetnadel einstellt.

Mit *magnetischer Deklination* wird der Winkel bezeichnet, welcher von dem magnetischen und astronomischen Meridian gebildet wird; man nennt die Deklination eine *westliche* oder eine *östliche*, je nachdem der Nordpol der lediglich unter der Wirkung des Erdmagnetismus gerichteten Nadel sich westlich oder östlich des astronomischen Meridians befindet.

Unter *magnetischer Inklination* versteht man den Winkel, welchen die Richtung des erdmagnetischen Feldes mit der Horizontalebene bildet. Eine Magnetnadel, die um eine durch ihren Schwerpunkt hindurchgehende Horizontalachse frei drehbar ist, bildet mit dem Horizont einen Winkel gleich der Inklination, wenn die Drehungsachse senkrecht zum magnetischen Meridian ist. Eine so angeordnete Magnetnadel trägt den Namen *Inklinationsnadel.* Alle Punkte, in welchen die Inklination Null ist, d. h. in welchen die Inklinationsnadel horizontal bleibt, bilden eine Linie, die um die ganze Erde in der Nähe des Äquators verläuft und *magnetischer Äquator* genannt wird. Nördlich von dem magnetischen Äquator wendet sich der Nordpol der Nadel nach unten, südlich von demselben weist er sich oben. Die Inklination wächst mit der geographischen Breite. In drei in der Nähe des geographischen Nordpols bezw. Südpols gelegenen Punkten ist die Inklination gleich 90°, d. h. eine dort aufgestellte Inklinationsnadel würde sich vertikal stellen.

Die magnetische Kraft in einem beliebigen Punkte auf der Erdoberfläche kann in zwei Komponente zerlegt werden, wovon die eine horizontal, die andere vertikal ist, und die bezw. *Horizontal-* und *Vertikalintensität des erdmagnetischen Feldes* genannt werden.

Wenn das zu untersuchende magnetische Feld auch nicht vollkommen, aber angenähert gleichförmig ist, so kann es doch praktisch durch eine Magnetnadel untersucht werden, unter der Bedingung, dass deren Länge so klein gewählt wird, dass in dem ganzen Raume, in dem sich ihre Pole während der Einstellung bewegen, die Richtung des Feldes als

parallel und die Feldstärke als konstant angesehen werden können. Wenn man dann im Felde die Kraftlinie bestimmen will, welche durch einen gegebenen Punkt A hindurchgeht, so bringt man in diesen Punkt den Mittelpunkt der Magnetnadel und bestimmt die Richtung, nach welcher sie sich einstellt; dieser Richtung folgend, wählt man einen dem Punkte A nahe gelegenen Punkt B, bringt in ihn den Mittelpunkt der Nadel und bestimmt die neue Richtung der Orientierung; dieser neuen Richtung folgend, wählt man einen dritten Punkt C, wohin man wieder den Mittelpunkt der Nadel bringt, um wieder die von ihr angenommene Lage zu bestimmen, und so verfährt man für eine Reihe von weiteren Punkten. — Die gebrochene Linie, die ihre Knickstellen in den Punkten A, B, C, ... hat, ist keine Kraftlinie, unterscheidet sich aber von einer Kraftlinie um so weniger, je zahlreicher und je näher einander die betrachteten Punkte sind.

66. Magnetische Spektra. — Die Magnetnadel kann praktisch zur Untersuchung eines Feldes nicht dienen, in welchem die Intensität und die Richtung von Punkt zu Punkt stark variieren, in welchem nämlich die Kraftlinien komplizierte Formen und grosse Krümmungen besitzen. In solchen Fällen kann ein Verfahren eingeschlagen werden, das, wiewohl etwas grob, doch sehr bequem ist und schnell zum Ziele führt. Dieses Verfahren gestattet, eine ziemlich genaue Zeichnung der Kraftlinien in einer bestimmten Horizontalebene, d. h. eine angenäherte Darstellung eines horizontalen, ebenen Schnittes des magnetischen Feldes anzufertigen.

In die betrachtete Horizontalebene bringt man ein fest auf einen kleinen Rahmen gespanntes Papierblatt oder eine dünne Glasplatte. Auf das Blatt oder die Platte streut man durch ein Sieb gleichförmig etwas Eisenfeilicht, dann klopft man leicht auf den Rahmen oder auf die Platte, um zu bewirken, dass die Eisenfeilspäne etwas in die Höhe springen. Die Späne magnetisieren sich durch Influenz des magnetischen Feldes; in den Augenblicken, in welchen sie sich beim Springen vom Papierbogen oder Glas entfernt befinden, sind sie vollständig frei im Raume und verhalten sich wie frei drehbare Magnetnadeln; durch gegenseitige Beeinflussung ziehen sie sich an, vereinigen sich fadenförmig und fallen orientiert wieder auf den Bogen oder die Platte. Bei weiterem Klopfen vervollständigen die schon gebildeten Fäden ihre Orientierung, sodass nach einiger Zeit das Feilicht auf dem Papier oder dem Glas deutliche Linien zeichnen wird, welche den Verlauf der Kraftlinien in der Nähe der Ebene, auf welcher das Feilicht sich befindet, darstellen. Das entstandene Gebilde nennt man ein *magnetisches Spektrum*.

Dadurch, dass man eine Glasplatte benützt, die mit einem Firnis bestrichen ist, welcher in kaltem Zustande fest, erwärmt aber weich ist,

dringen beim Erwärmen der Platte die Eisenfeilspäne in den Firnis ein, sodass sie nach dem Erkalten in der angenommenen Lage bleiben und somit die Figur fixiert ist.

Die Figuren 57 bis 60 geben Beispiele von magnetischen Spektren, welche durch das oben beschriebene Verfahren hergestellt wurden.

Die Figur 57 stellt das Spektrum in einer Horizontalebene über einem prismatischen Stabmagneten dar. Die Kraftlinien gehen vom Nordende des Stabes divergierend aus und endigen konvergierend in dem Südende;

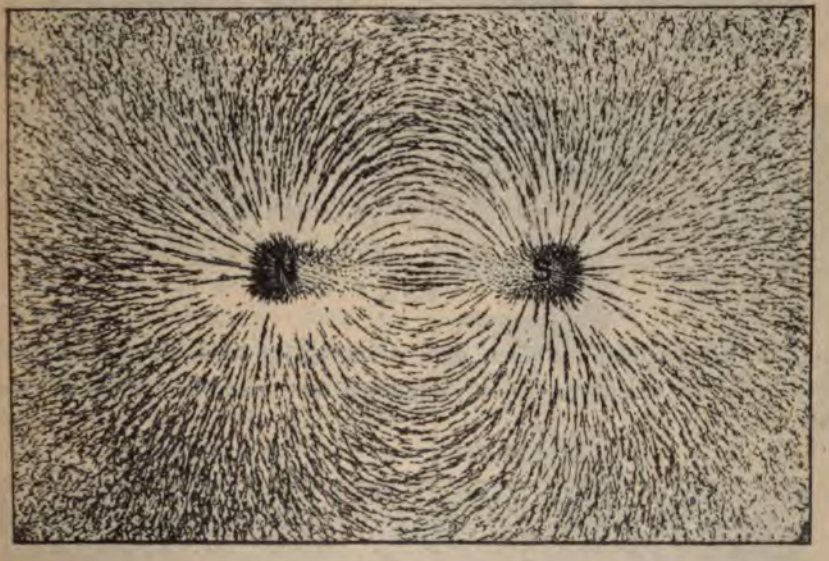


Fig. 57.

in der Nähe der Enden verlaufen sie innerhalb der Grenzen der Zeichnung nahezu radial; im mittleren Teile des Stabes laufen sie parallel zur Achse des Magneten vom Nord- zum Südende. An den Enden des Stabes hat das Spektrum zwei Regionen, in denen nur wenig Späne liegen geblieben sind. Dies ist der Fall, weil die Kraftlinien in jenen Regionen vertikal oder gegen die Papierebene sehr geneigt sind, und folglich die Feilichtfäden auf ihrer glatten Unterlage nicht liegen bleiben konnten.

Das so ermittelte magnetische Spektrum giebt uns nur die Verteilung der Kraftlinien im magnetischen Felde ausserhalb des Magneten, sagt aber nichts in bezug auf dessen Inneres.

Wir werden sehen, dass die Kraftlinien innerhalb des Magneten nicht die Fortsetzung der äusseren sind, und deswegen haben wir bis jetzt gesagt, dass die Kraftlinien vom Nordende *ausgehen* oder *beginnen* und am

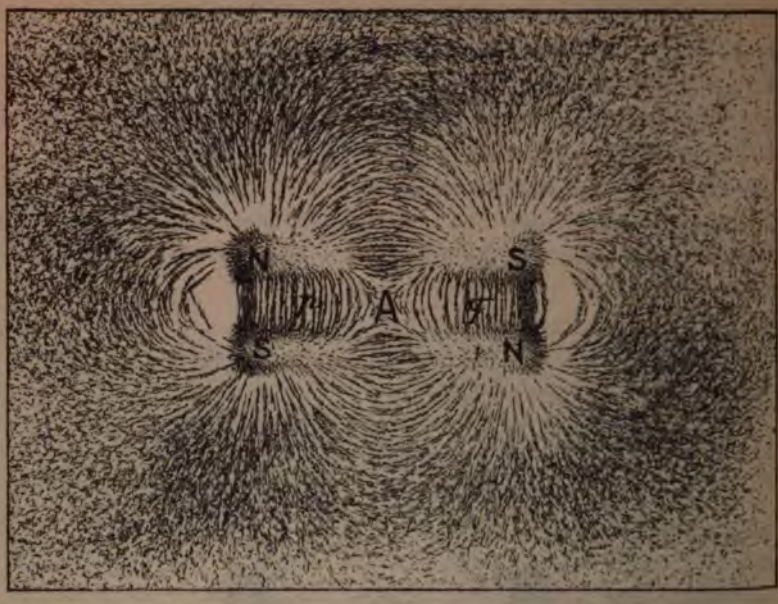


Fig. 58.

Südende *endigen* oder *aufhören*, weil es unrichtig wäre zu sagen, dass die Kraftlinien an einem Ende des Magneten aus- und beim anderen wieder eintreten.

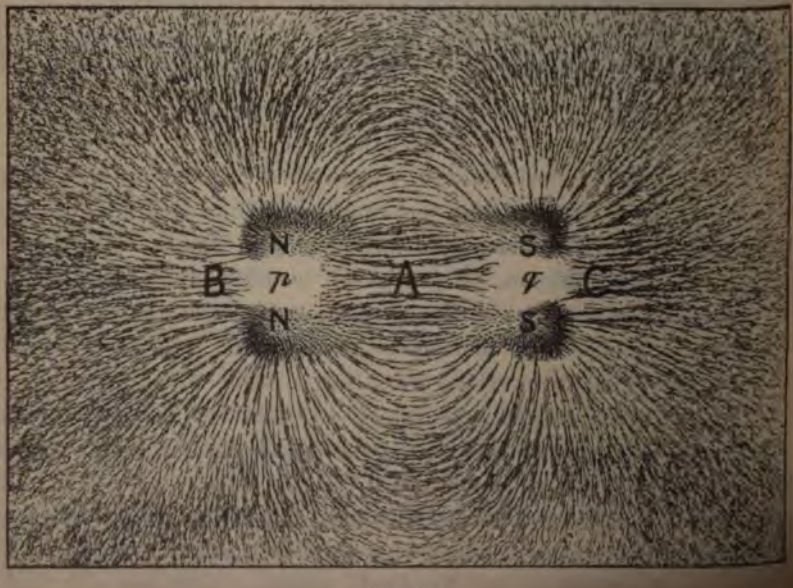


Fig. 59.

Die Figur 58 stellt das Spektrum dar, das man mittels zweier prisma-
ıer, in einer Horizontalen parallel nebeneinander liegender Magnete
ılt, wenn sich die Pole des einen Magneten den entgegengesetzten
n des anderen gegenüber befinden. In dem Raume ausserhalb der
sen der beiden Magnete haben die Kraftlinien ungefähr denselben Ver-
wie im vorigen Falle. In dem Raume A in der Mitte zwischen den
en Magneten hat man fast keine Kraftlinien, und die Stärke des
netischen Feldes ist hier sehr gering; die einander gegenüberliegenden
en sind dagegen durch Kraftlinien verbunden, welche in den Teilen p
q zwischen den Stäben sehr dicht und nahezu parallel sind und ein
starkes, zu den beiden Stäben nahezu senkrechtes Feld anzeigen;
erhalb des Raumes zwischen
en Magneten gehen die Kraft-
n wieder von einem Ende aus
endigen im anderen.

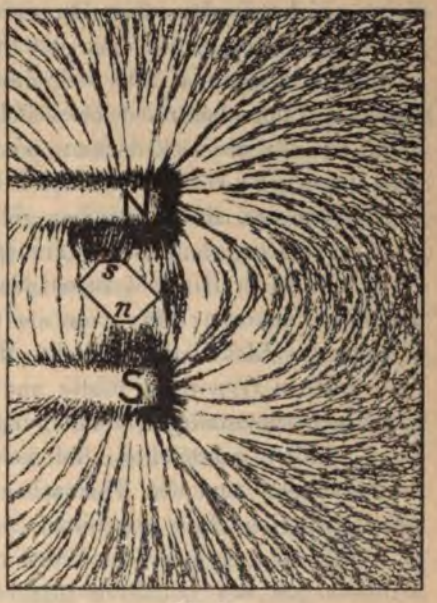


Fig. 60.

Die Figur 59 zeigt die Anord-
g der Kraftlinien bei zwei
llelen, geradlinigen Magneten,
ich der vorigen; es sind je-
ı in diesem Falle die Magnete
gelegt, dass sich die gleich-
igen Pole einander gegenüber
ıden. Die Zeichnung ist in
zwischen den Achsen der
en Magnete eingeschlossenen
me vollständig verschieden von
vorigen. Zwischen den beiden
ıen (A) biegen sich die Kraft-
n, die von den Nordenden
gehen, nach kurzem Verlauf,
nen eine Richtung annähernd
llel den Achsen der Stäbe an und endigen an den Südenden; in den
ionen B und C sind die Kraftlinien ebenfalls annähernd parallel zu
Achsen. In den Regionen p und q zeigt das Spektrum keine
ichtlinien, das Feld ist hier sehr schwach und verschwindet ganz in
beiden Mittelpunkten dieser Regionen.

Endlich stellt die Figur 60 einen Teil des Spektrums dar, das man
lt, wenn quer zwischen den entgegengesetzten Polarenden N und S
er paralleler Magnete oder eines Hufeisenmagneten ein Stück von
hem Eisen liegt. Man ersieht, dass in diesem Falle die Kraftlinien
dichtesten in jenen Regionen sind, wo der Abstand zwischen dem

Eisenstücke und den magnetisierten Stäben am kleinsten ist, d. h. zwischen N und s und zwischen S und n.

67. Faraday'sche Regel über die Wirkung der Kraftlinien in einem Felde. — Wir haben die magnetischen Kräfte als fernwirkende Kräfte, die sich zwischen magnetisierten Körpern zeigen, betrachtet; in der Darstellung der erörterten Thatsachen und der Gesetze, die sich auf jene beziehen, haben wir uns nach dieser Anschauungsweise gerichtet. Es war zweckmässig, dies zu thun, in Anlehnung an die bis jetzt besprochenen Thatsachen, ohne in die Behandlung eine vorzeitige Hypothese einzuführen. Aber bei dem heutigen Stande der Wissenschaft widerstrebt es unserem Verstande, Kräfte anzunehmen, welche in die Ferne wirken, ohne dass zu ihrer Übertragung ein Medium auftritt, welches den Raum zwischen den Körpern, zwischen welchen sie wirken, ausfüllt. Dass die Kräfte sich durch das Medium von Teil zu Teil fortpflanzen, kann aber nicht bezweifelt werden, und wir werden sehen, dass man, wie für die elektrischen, so auch für die magnetischen Kräfte, auf ganz natürliche Weise zu dieser Überzeugung durch die Gesamtheit aller jetzt bekannten Erscheinungen gelangt. Die Kenntnis der wenigen bis jetzt erwähnten, elementaren Thatsachen gestattet uns noch nicht, Erörterungen in dieser Hinsicht zu entwickeln; wir wollen aber doch jetzt schon erwähnen, dass Faraday, von der Gesamtheit der Erscheinungen auf dem Gebiete der Elektrizität und des Magnetismus geleitet, die Notwendigkeit einer solchen Hypothese fühlte und nach derselben die ganze Darstellung seiner experimentellen Untersuchungen richtete. Die Ausdrucksweise selbst, die Faraday gebrauchte, und welche die moderne Wissenschaft als die angebrachteste und den Thatsachen entsprechendste anerkennt, ist in Anlehnung an jene Idee abgebildet.

Maxwell, welcher das Werk von Faraday vervollständigte, gab den Auffassungen des Letzteren mathematische Form und Genauigkeit und wies nach, dass alle magnetischen Erscheinungen ebenso durch die eine wie durch die andere Hypothese erklärt werden können, sodass unter dem rein mathematischen Gesichtspunkte die beiden Hypothesen gleichwertig sind.

Uns den Ideen Faradays anschliefsend, können wir die magnetischen Kräfte dadurch erklären, dass wir dieselben als Wirkung einer Deformation oder eines besonderen Zwangszustandes des Mediums betrachten, in welchem sich die Magnete befinden. Diese Deformation muss derart sein, dass in jedem Volumenelement ein Zug in der Richtung der Kraftlinien und ein Seitendruck in der hierzu senkrechten Richtung besteht. Auf diese Weise treten die Kraftlinien und -röhren, für welche wir rein

netrische Definitionen gegeben haben, in der Redeweise thatsächlich
or, als ob sie wirklich existierten. Die Kraftröhren sind Teile des
iums, welche in der Längsrichtung gedehnt und in der Querrichtung
ichtet sind und deswegen das Bestreben haben, sich zu verkürzen
zu schwellen; analog sind die Kraftlinien fadenförmige Elemente des
iums, die darnach streben, sich zu verkürzen und einander ab-
ssen.

Die Richtigkeit dieser Darlegungen wird erst später bewiesen werden
en, wir haben aber diese Begriffe einstweilen unabhängig von ihrem
nschaftlichen Wert jetzt schon als feststehend vorausgeschickt, weil
daraus bei dem praktischen Studium der magnetischen Felder Nutzen
n können. Die letzten Betrachtungen lassen sich, vollständig ent-
et von dem, was auf die Hypothese über das Medium anspielt, in
Regel zusammenfassen, welche Faraday als das Endergebnis aus der
chtung aller beobachteten Erscheinungen, nicht nur im magnetischen,
rn allgemein in einem beliebigen Kraftfelde, aussprach. Diese Regel
t: *Die Kraftlinien suchen sich zu verkürzen und stossen sich gegenseitig ab.*

Die Faraday'sche Regel ist sehr bequem zu verwenden, wenn man
Zeichnung oder ein Modell der in einem Felde vorhandenen Kraftlinien
t und durch blosse Anschauung ohne Berechnungen finden will,
ier Art die Bewegungsantriebe sind, welche die im Felde gelegenen
er durch die Kräfte des Feldes erfahren. Wir können z. B. diese
l auf die speziellen Fälle anwenden, für welche wir die magnetischen
tra betrachtet haben.

Beschäftigen wir uns zuerst mit jenem magnetischen Spektrum,
ies dem Falle zweier paralleler, geradliniger Magnete mit gegen-
tehenden ungleichnamigen Polen entspricht (Fig. 58). In den Re-
n p und q sind die Kraftlinien sehr dicht aneinander und senkrecht
en beiden Magneten; sie suchen sich zu verkürzen; ihre Wirkung
die beiden Magnete ist analog derjenigen, die man hätte, wenn an
der Kraftlinien zwischen den beiden Magneten gespannte elastische
üre wären, welche, ihrer Elastizität wegen, sich zu verkürzen suchten.
beiden Magnete werden also gegeneinander angetrieben, sie ziehen
der an.

In jenem Falle dagegen, in welchem sich die gleichnamigen Pole der
n Magnete gegenüber liegen (Fig. 59), verlaufen die Kraftlinien in
Regionen A, B, C parallel; sie stossen sich gegenseitig ab, wie dies
lastischen, mit den Magneten verbundenen Federn der Fall wäre,
ie das Bestreben haben, sich auszudehnen.

Betrachten wir zuletzt das Spektrum (Fig. 60) in dem Falle, in
iem ein Eisenstück sn zwischen zwei ungleichnamigen Polen N und S

auch die kleinsten Teilchen, welche man durch mechanische Teilung erhalten kann, noch ebenso viele Magnete seien. Diese kleinen Magnete, aus deren Gesamtheit der ganze Magnet besteht, heissen *Elementarmagnete;* die von dem ganzen Magneten hervorgebrachten Wirkungen sind die Resultierenden von jenen, die von den einzelnen komponierenden Elementarmagneten herrühren. Über die Dimensionen dieser Elementarmagnete sagt bis jetzt die Erfahrung nichts; wir wissen nur, dass dieselben kleiner sein müssen als jene, welche wir bei der äussersten Unterteilungsgrenze erreichen können; deswegen müssen wir in der mathematischen Behandlung auch die verschwindend kleinen Teile, welche den einzelnen Volumenelementen entsprechen, in welche wir jeden Magneten zerteilt denken können, als vollständige Magnete ansehen; wir müssen nämlich annehmen, dass die Elementarmagnete von den Volumenelementen des Magneten dargestellt werden.

Der eben erwähnte Grundversuch beweist, dass die Erscheinungen des Magnetismus, wie immer geartet sie auch sein mögen, gewiss nicht nur von den Enden der Magnete abhängig sind, in welchen, wie wir sagten, die magnetischen Kräfte sich zeigen, sondern dass sie vielmehr von den Zuständen der ganzen Masse des Magneten abhängen; jedes seiner Elemente befindet sich in jenen besonderen Zuständen, deren Vorhandensein die Erscheinungen des Magnetismus bedingt.

69. Richtung und Stärke der Magnetisierung. Gleichförmige und ungleichförmige Magnete. — Ein Magnet heisst *gleichförmig*, wenn man ihn als aus gleichen Elementarmagneten zusammengesetzt betrachten kann, welche sämtlich gleiche Dimensionen, gleiches magnetisches Moment und gleiche Richtung haben.

Die gemeinsame Richtung der magnetischen Achsen der Elementarmagnete heisst *Richtung der Magnetisierung.* Das magnetische Moment des ganzen Magneten ist die Summe der magnetischen Momente der Elementarmagnete und ist folglich dem Volumen des ganzen Magneten proportional. Es sei $\mathfrak{M}$ das magnetische Moment und v das Volumen des Magneten; der Quotient $\frac{\mathfrak{M}}{v}$ ist dann das magnetische Moment der Volumeneinheit; er heisst *Stärke* oder *Intensität der Magnetisierung* und wird mit J bezeichnet:

$$J = \frac{\mathfrak{M}}{v}. \tag{4}$$

Die Definitionen, die wir soeben für den besonderen Fall einer gleichförmigen Magnetisierung gegeben haben, können ohne Weiteres auf den allgemeinen Fall einer beliebigen Magnetisierung ausgedehnt werden,

unter der einfachen Bedingung, dass dieselbe in dem betrachteten Raume eine Tangente hat. In der That wird man die Magnetisierung in einem unendlich kleinen Volumenelemente immer als gleichförmig annehmen dürfen. Auf das Element kann man die oben dargelegten Definitionen anwenden; wir werden also *Richtung der Magnetisierung* in einem gewissen Punkte eines Magneten die Richtung der magnetischen Achse eines den Punkt einschliessenden Elementarmagneten nennen.

Wenn $d\mathfrak{M}$ das magnetische Moment und dv das Volumen eines Elementes ist, so ist die Stärke der Magnetisierung in einem Punkte desselben Elementes durch

$$J = \frac{d\mathfrak{M}}{dv} \qquad (5)$$

gegeben.

Wir werden *Stärke der Magnetisierung in einem Punkte eines Magneten* den Grenzwert nennen, welchem das Verhältnis des magnetischen Moments eines den Punkt einschliessenden Magnetteiles zu dem Volumen des Teiles selbst zustrebt, wenn das letztere nach Null konvergiert.

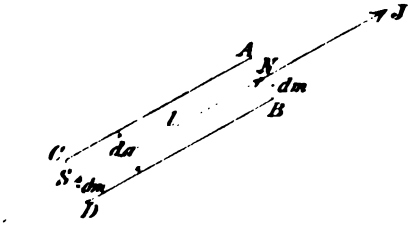


Fig. 62

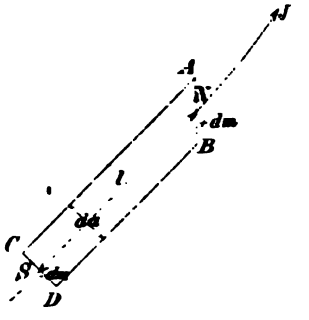


Fig. 63.

Betrachten wir einen der Elementarmagnete $ABCD$ (Fig. 62), den wir prismatisch oder zylindrisch voraussetzen können; bezeichnen wir mit $d\mathfrak{M}$ das magnetische Moment, mit l die Länge und mit da den Querschnitt desselben. Die Grössen l und da sind beide verschwindend klein; wir können aber da als unendlich kleine Grösse höherer Ordnung gegen l vernachlässigen. Es seien endlich $+dm$ und $-dm$ die entgegengesetzt gleichen Mengen von Magnetismus, die das Element enthält. Die Erfahrung lehrt, dass in einem Magneten mit länglicher Form die magnetischen Massen als in der Nähe der Enden befindlich angenommen werden können; wir können daher die Annahme machen, dass in dem Element die Massen sich nur auf den Endseiten AB und CD verteilt befinden und ferner, wenn wir nur die Wirkungen bei Entfernungen, die im Vergleiche mit l

nicht unendlich klein sind, ins Auge fassen, voraussetzen, dass die Massen auf den beiden Seiten gleichförmig verteilt sind, d. h. wir können uns vorstellen, dass dieselben in den Mittelpunkten N und S dieser Flächen konzentriert sind. Bei einer solchen Verteilung ist das magnetische Moment durch $d\mathfrak{M} = l dm$ ausgedrückt; das Volumen des Elements ist $dv = l da$ und folglich ist

$$J = \frac{dm}{da}, \qquad dm = J da. \tag{5}$$

Wenn der Elementarmagnet dagegen die in Fig. 63 angedeutete Form besitzt, so können die Massen $+ dm$ und $- dm$ noch als gleichmässig auf den äusseren Seiten verteilt angesehen und folglich nochmals in den Mittelpunkten N und S konzentriert gedacht werden. Wenn l der Abstand NS und da ein Schnitt senkrecht zur Achse des Prismas ist, hat man $d\mathfrak{M} = l dm$, $dv = l da$, und folglich bestehen noch die Gleichungen (5).

70. Magnetisierungslinien. Magnetische Fäden. — Die Magnetisierung ist eine Vektorgrösse; auf dieselbe können alle Sätze angewandt werden, die wir für die Vektoren allgemein bewiesen haben. Es ist wichtig, die Flusslinien, die Flussröhren und die Flüsse des Vektors J zu betrachten.

Die Flusslinien der Magnetisierung, welche auch einfach *Magnetisierungslinien* genannt werden, sind Linien, bei welchen in jedem Punkte die Richtung der Magnetisierung mit der Tangente der Linie zusammenfällt. Durch jeden Punkt eines Magneten kann eine Magnetisierungslinie gezogen werden.

Wenn man durch alle Punkte einer im Innern eines Magneten gezogenen, in sich geschlossenen Linie die Magnetisierungslinien zieht, so ist deren geometrischer Ort eine röhrenförmige Fläche und der von dieser begrenzte geometrische Körper eine *Magnetisierungsröhre*.

Besitzt der Schnitt einer Röhre mit einer zu den Magnetisierungslinien senkrechten Fläche einen unendlich kleinen Inhalt, so bildet die Magnetisierungsröhre einen *magnetischen Faden*.

Wir werden ferner unter dem Namen *Fluss der Magnetisierung durch eine Fläche* das auf die ganze Fläche ausgedehnte Integral

$$\int J \cos \Theta \, dS = \int J_n \, dS$$

verstehen, wobei man mit Θ den von der Richtung der Magnetisierung und der positiven Richtung der Normalen der Fläche eingeschlossenen Winkel, mit J_n die Komponente $J \cos \Theta$ der Magnetisierung nach der genannten Normalen und mit dS den Inhalt eines Flächenelementes bezeichnet.

[illegible] Faden PQ, und denken wir [illegible] Q (Fig. 64) in v[illegible] [illegible]lich kleine Teile zerl[illegible] [illegible] von diesen Elementen k[illegible] [illegible] Zylinder oder ein Pri[illegible] [illegible]sehen werden, in welc[illegible] [illegible] Magnetisierung gleichfö[illegible] [illegible] parallel zur Achse ist, [illegible] [illegible] einen Elementarmagne[illegible] [illegible] Die auf den Endsei[illegible] [illegible] dieser Elemente verte[illegible] Masse ist (5)

$$dm = J da.$$

[illegible] Namen *Potenz des Fadens.* [illegible] zu Element eines und [illegible]

[illegible] Fäden. **Solenoidische Magnetisierung.** [illegible]schaft hat, dass die Potenz [illegible] besitzt, d. h. dass der Fl[illegible] [illegible] des Fadens konstant ist, d[illegible] [illegible] gegebene Definition [illegible] solenoidischen, magnetisc[illegible]

[illegible] hat die auf den Endfläc[illegible] [illegible]ben Wert; deswegen müs[illegible] [illegible]genden Elemente trennen[illegible] [illegible] und dem Vorzeichen n[illegible] [illegible] eine auf jeder Seite, v[illegible] [illegible] Massen in die Ferne he[illegible] [illegible] dadurch ausdrücken, dass n[illegible] [illegible] ganzen Länge keine Masse v[illegible] [illegible] die Endseiten des Fad[illegible] [illegible] Masse des ersten Elemen[illegible] [illegible] wird, und analog auf [illegible] [illegible] Elements, welche [illegible] [illegible] lässt sich auch dadurch a[illegible] [illegible] des Fadens seien bezw. [illegible] vorhanden. [illegible] man ihn in viele sole[illegible]

dische Magnete zerteilt denken kann, so nennt man seine Magnetisierung *solenoidisch* und ihn selbst einen *solenoidischen Magneten*. Ein solcher Magnet enthält in seinem Innern keinen freien Magnetismus und besitzt solchen nur auf der Oberfläche. Auf derselben ist der freie Magnetismus ein positiver oder Nordmagnetismus in allen Punkten, in welchen magnetische Fäden endigen, oder in welchen die Magnetisierung in bezug auf den Magneten von innen nach aussen gerichtet ist; er ist dagegen ein negativer oder Südmagnetismus in allen den Punkten, von welchen ein magnetischer Faden ausgeht, d. h. wo die Magnetisierung nach dem Innern des Magneten gerichtet ist. Jedem Elemente der Oberfläche, welches eine positive magnetische Masse enthält, entspricht als anderes Ende eines magnetischen Fadens ein Flächenelement, auf welchem eine gleiche, aber negative magnetische Masse liegt. Der freie Magnetismus bildet auf der Oberfläche des Magneten zwei Verteilungen von gleichen, aber mit entgegengesetzten Vorzeichen versehenen Massen; jedem Element entspricht hierbei ein anderes analog gelegenes Element, in welchem eine entgegengesetzt gleiche Masse vorhanden ist.

In einem solenoidischen Magneten kennt man, sobald die Verteilung der Magnetisierung, d. h. der einfachen Fäden gegeben ist, die Verteilung des freien Magnetismus, und man kann die Kraftwirkung ausrechnen, die der Magnet ausübt. Wenn wir beispielsweise einen einfachen Faden ins Auge fassen, so ist nach der Formel (2) das von ihm in einem beliebigen Punkte P, welcher sich in den Entfernungen r_1 bezw. r_2 vom Nord- und Südende des Fadens befindet, hervorgerufene Potential

$$V = dm\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) = Jda\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right).$$

Indem hierdurch der Wert des Potentials in jedem Punkte bekannt ist, ist auch das Feld vollständig bestimmt.

72. Nicht solenoidische Fäden und Magnete. Freier Magnetismus im Innern eines Magneten. Dichte des Magnetismus. — Die Beziehung $dm = Jda$ zwischen der Stärke der Magnetisierung und der auf den Endflächen jedes Elementes verteilten magnetischen Masse kann auf die einzelnen Elemente eines magnetischen Fadens angewandt werden, auch wenn dieser nicht solenoidisch ist; auch in diesem Falle kann man durch sie die Menge dm von freiem Magnetismus ausrechnen, welche auf dem einen oder auf dem anderen Ende des Fadens vorhanden ist; es genügt hierzu für J und da die dem Ende selbst entsprechenden Werte einzusetzeu.

Betrachten wir nun aber das Innere des Fadens. Weil die solenoidische Bedingung

heisst das Produkt nJ *magnetische Potenz des Blattes.* Wir werden die magnetische Potenz eines Blattes mit $\mathfrak{P}$ bezeichnen, d. h. wir werden setzen:

$$\mathfrak{P} = nJ. \tag{8}$$

Im allgemeinen variiert die magnetische Potenz von Punkt zu Punkt eines und desselben Blattes. Ein Blatt, in dessen sämtlichen Punkten die Potenz gleichen Wert besitzt, heisst *einfach.* Wenn ein einfaches magnetisches Blatt an allen Stellen eine gleiche Dicke n besitzt, so ist auch die Magnetisierung J gleichförmig; wenn n von Punkt zu Punkt veränderlich ist, so variiert J mit n in umgekehrtem Verhältnis.

In einem magnetischen Blatte hat man auf den beiden Seiten gleiche, dem Vorzeichen nach entgegengesetzte magnetische Belegungen. Auf einem Element der Nordfläche vom Inhalte da hat man eine magnetische Menge

$$dm = Jda$$

mit einer Dichte

$$\sigma = \frac{dm}{da} = J;$$

gleiche und mit entgegengesetzten Vorzeichen versehene magnetische Masse und Dichte hat man auf dem entsprechenden Element der anderen Seite. Wenn J konstant ist, wie in einem einfachen Blatte mit gleichmässiger Dichte, sind die beiden Verteilungen des Magnetismus gleichförmig.

Ein Magnet, welcher aus einfachen, aufeinanderliegenden Blättern bestehend gedacht werden kann, heisst *lamellar.* Wenn die Zahl der Elementarblätter unendlich gross und die Potenz eines jeden unendlich klein ist, so ist die Magnetisierung stetig verteilt. Die Magnetisierungslinien sind senkrecht zu den Blättern, aus welchen der lamellare Magnet besteht.

74. Verteilung des freien Magnetismus in den Magneten. — Wir haben schon nachgewiesen, dass im allgemeinen in einem Magneten zwei Verteilungsarten von freiem Magnetismus, die eine auf der Oberfläche, die andere in dem Volumen des Magneten, zu betrachten sind. Wir können nun sehen, wie die beiden Verteilungen bestimmt werden können, wenn in jedem Punkte des Magneten die Stärke und die Richtung der Magnetisierung gegeben sind.

1. *Verteilung des Magnetismus auf der Oberfläche.* — Auf der Oberfläche SS (Fig. 65) eines Magneten betrachte man ein Element AB vom Flächeninhalt dS; AN sei die nach aussen gerichtete Normale des Elements und AJ die Richtung der Magnetisierung in den Punkten des

Elementes selbst; man bezeichne mit J die Stärke der Magnetisier und mit Θ den Winkel der beiden Richtungen AN und AJ.

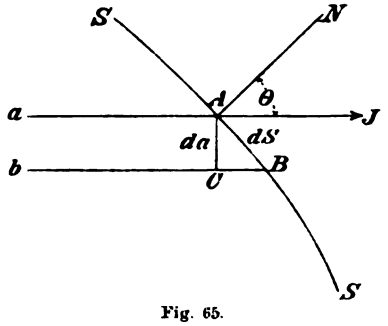


Fig. 65.

Auf dem Element AB endigt magnetischer Faden $aAbB$. Eine die Faden senkrecht schneidende, durch Punkt A gelegte Ebene, in der Fi durch AC dargestellt, hat einen Fläch inhalt $da = dS \cos\Theta$. Die auf d Element dS vorhandene, freie mag tische Masse ist diejenige, welche dem Ende dieses Fadens vorhanden und wird (5) durch

$$dm = Jda = JdS\cos\Theta$$

oder, wenn man mit $J_n = J\cos\Theta$ die Komponente von J nach der N malen zur Fläche SS bezeichnet, durch

(9) $$dm = J_n dS$$

gegeben, wobei J_n als positiv anzunehmen ist, wenn nach aussen gerich

Die auf einem Element der Oberfläche eines Magneten vorhan Menge von freiem Magnetismus ist gleich dem aus dem Magneten d das Element austretenden Flusse der Magnetisierung.

Wenn σ die Dichte des freien Magnetismus in einem Punkte A Elementes dS ist, so erhält man, da

$$\sigma = \frac{dm}{dS},$$

aus der Formel (9):

(10) $$\sigma = J_n = J\cos\Theta,$$

oder:

Die Dichte des freien Magnetismus in einem Punkte der Oberfl eines Magneten ist der Grösse und dem Vorzeichen nach gleich der K ponenten der Magnetisierung nach der äusseren Normalen der Fläche.

Die auf einem beliebigen, endlichen Teil der Oberfläche eines Magn verteilte Menge von freiem Magnetismus ist durch das auf den ga betrachteten Teil ausgedehnte Integral

$$\int J_n dS$$

ausgedrückt, oder:

Auf einem beliebigen Teil der Oberfläche eines Magneten ist eine Masse freiem Magnetismus verteilt, welche der Grösse und dem Vorzeichen dem aus demselben Flächenteil austretenden Flusse der Magnetisie- gleicht.

Die gesamte auf der ganzen Oberfläche eines Magneten verteilte Masse on freiem Magnetismus wird durch das vorige Integral

$$M_s = \int J_n dS$$

en, wobei das Integral über die ganze Oberfläche ausgedehnt werden oder:

Die gesamte Menge von freiem Magnetismus, welche auf der Oberfläche Magneten verteilt ist, ist gleich dem Magnetisierungsflusse, der aus der- Fläche austritt.

2. Verteilung des freien Magnetismus im Innern eines Magneten. — chnen wir, wie oben, mit M_s die Summe der Massen von freiem etismus, welche auf der Oberfläche des Magneten verteilt sind, und g mit M_v die Summe der Massen von freiem Magnetismus im n des Magneten, dann stellt die Summe $M_s + M_v$ die gesamte im eten vorhandene Menge von Magnetismus dar; aber die gesamte von Magnetismus, die in einem vollständigen Magneten vorhanden t immer gleich Null [63], es muss folglich

$$M_v + M_s = 0$$

Daher

$$M_v = -M_s = -\int J_n dS.$$

Die im Volumen eines Magneten verteilte Menge von freiem Magne- s ist gleich dem Fluss der Magnetisierung, welcher in den Magneten dessen gesamte Oberfläche eintritt.

Man kann noch weiter gehen und die Menge M_v von freiem Mag- nus ausrechnen, welche in einem von einer beliebigen, geschlossenen e begrenzten Teile eines Magneten vorhanden ist. Stellen wir uns esem Zwecke vor, dass man, ohne die Verteilung der Magnetisierung ndern, den Teil M aus dem Magneten PQ vom Übrigen absondert. der Fläche des losgetrennten Stückes und auf jener der Höhlung, nfolge der Abtrennung von M im Magneten PQ entsteht, werden gleiche, mit entgegengesetzten Vorzeichen versehene Verteilungen frei, e sich vorher innerhalb des Magneten gegenseitig aufhoben.

Wenn aber die Magnetisierung, wie wir voraussetzen, in jedem Punkte der Stärke und Richtung nach unverändert bleibt, dann bleiben auch die Verteilungsverhältnisse des freien Magnetismus in dem Volumen der beiden Teile des Magneten unverändert. Nun lehrt uns einer der Grundversuche, auf welchem die ganze Theorie des Magnetismus beruht [68], dass der Teil M nach der Lostrennung zu einem vollständigen Magneten wird: wir können folglich die obigen Schlüsse auf ihn anwenden. Wenn also M_v die Menge des im Innern der Fläche S vorhandenen freien Magnetismus und M_s die Masse bezeichnet, die auf der Fläche S frei werden würde, wenn das Stück M von PQ losgetrennt wäre, so haben wir:

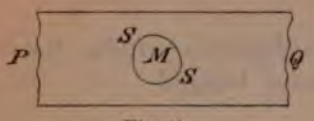


Fig. 66.

$$M_v = -M_s = -\int J_n \, dS,$$

wobei das Integral über die ganze Fläche S ausgedehnt und die Stärke der Magnetisierung J_n als positiv angenommen wird, wenn sie nach aussen gerichtet ist. Dieses Ergebnis kann durch den folgenden Satz ausgedrückt werden:

Die Menge von freiem Magnetismus, die in dem von einer beliebigen, geschlossenen Fläche begrenzten Volumenteile eines Magneten enthalten ist ist der Grösse und dem Vorzeichen nach gleich dem Flusse der Magnetisierung, der in dasselbe Volumen durch dessen Oberfläche eintritt.

Das soeben bewiesene Theorem gilt auch für den Fall einer geschlossenen Fläche S (Fig. 67), welche teilweise ausserhalb des Magneten liegt und nur ein Stück desselben ausschneidet. Um dies nachzuweisen, genügt es zu bemerken, dass J in allen Punkten des ausserhalb des Magneten liegenden Teiles ADB von S gleich Null ist, und dass folglich der in S eintretende Fluss der Magnetisierung sich auf jenen beschränkt, welcher durch die Fläche ACB eintritt. Nun ist letzterer Fluss der Magnetisierung entgegengesetzt gleich der Menge von freiem Magnetismus, die auf der Oberfläche ACB des Stückes M vorhanden sein würde, welches durch einen der Fläche ACB entsprechenden Schnitt vom Magneten PQ losgetrennt wäre. Aber das vom Magneten losgetrennte Stück M würde selbst einen vollständigen Magneten bilden, in welchem die gesamte Menge von Magnetismus gleich Null ist; folglich wäre die Menge von freiem Magnetismus auf ACB entgegengesetzt gleich der übrigen, teilweise im Volumen M, teilweise

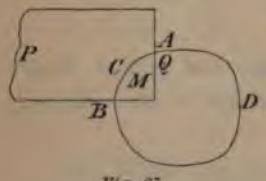


Fig. 67.

uf der Fläche AQB verteilten Masse. Der in S durch ACB eintretende luss der Magnetisierung ist also gleich der Summe der magnetischen Massen, die im Volumen M und auf der Fläche AQB vorhanden sind, d. h. gleich der Summe aller innerhalb der geschlossenen Fläche S vorhandenen magnetischen Massen. Und das ist es, was wir beweisen wollten.

Auch für eine Fläche S, welche kein Stück eines Magneten enthält, ist das Theorem giltig und einleuchtend. In der That ist sowohl der Fluss der Magnetisierung als auch die Menge des innerhalb der Fläche enthaltenen freien Magnetismus Null.

Für die analytische Behandlung lassen sich die beiden Theoreme in bezug auf die Verteilung des Magnetismus auf der Oberfläche und in dem Volumen eines Magneten in zwei Gleichungen zusammenfassen, welche wir Lord Kelvin verdanken. Wir wollen sie in wenigen Worten erläutern.

1) *Verteilung auf der Oberfläche.* — Wenn wir A, B und C die Komponenten von J nach drei orthogonalen Koordinatenachsen und bezw. α, β und γ den Kosinus des Winkels, welche jede dieser Achsen mit der nach aussen gerichteten Normalen zur Oberfläche des Magneten bildet, nennen, so haben wir

$$J_n = A\alpha + B\beta + C\gamma$$

und, unter Anwendung der Gleichung (10)

$$\sigma = A\alpha + B\beta + C\gamma.$$

2) *Verteilung innerhalb des Volumens des Magneten.* — Betrachten wir ein unendlich kleines Prisma, mit den Kanten dx, dy, dz parallel zu den Koordinatenachsen genommen, und nennen wir A, B und C die Komponenten nach den Achsen der Magnetisierung J in dem Eckpunkte, welcher dem Koordinaten-Mittelpunkte am nächsten ist und die Koordinaten x, y und z hat. Berechnen wir nun den Fluss der Magnetisierung, der in das Prisma eintritt; er besteht aus drei Flüssen, parallel zu den drei Achsen; jeder derselben ist die Differenz zwischen dem Flusse, der durch eine Seite ein-, und jenem, der durch die gegenüberliegende austritt. Der durch die Seite $dydz$ mit der Abscisse x eintretende Fluss ist $Adydz$; derjenige, der durch die gegenüberliegende Seite, welche denselben Flächeninhalt $dydz$ und die Abscisse $x + dx$ hat, austritt, ist dagegen

$$\left(A + \frac{\partial A}{\partial x} dx\right) dydz;$$

die Differenz aus den beiden ist

$$-\frac{\partial A}{\partial x} dxdydz,$$

und dies ist der in der Richtung der x-Achse eintretende Fluss. In analoger Weise findet man, dass die nach der Richtung der y- und z-Achse eintretenden Flüsse bezw.

$$-\frac{\partial B}{\partial y} dxdydz \quad \text{und} \quad -\frac{\partial C}{\partial z} dxdydz$$

sind.

Der gesamte in das Prisma eintretende Fluss der Magnetisierung ist also:

$$-\left(\frac{\partial A}{\partial x}+\frac{\partial B}{\partial y}+\frac{\partial C}{\partial z}\right)dxdydz.$$

Wenn man mit ϱ die Dichte des im Innern des Prismas vorhandenen freien Magnetismus bezeichnet, so ist die in diesem enthaltene Menge von freiem Magnetismus

$$\varrho dxdydz.$$

Nach dem von uns bewiesenen Satze müssen diese Massen und der eintretende Fluss der Magnetisierung J gleich sein; man hat daher

$$-\varrho=\frac{\partial A}{\partial x}+\frac{\partial B}{\partial y}+\frac{\partial C}{\partial z};$$

dies ist die zweite Gleichung von Lord Kelvin.

Ein einfaches Beispiel wird die Bedeutung und den Gebrauch der soeben bewiesenen Sätze genügend erklären.

Betrachten wir einen Magneten, der die Form eines prismatischen oder zylindrischen Stabes besitzt, und nehmen wir an, dass in ihm die Magnetisierung in jedem Punkte parallel zu der Achse sei (Fig. 68).

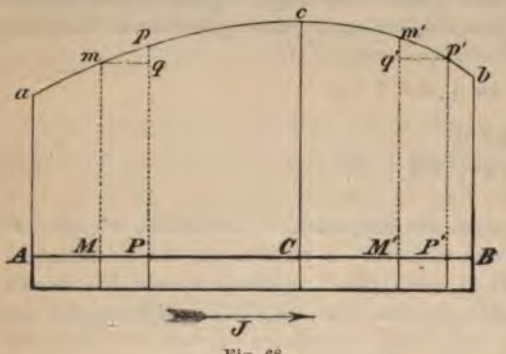


Fig. 68.

Auf der ganzen Seitenfläche des Zylinders oder des Prismas hat man $J_n = 0$, und folglich ist kein freier Magnetismus vorhanden. Die freien magnetischen Massen auf der Oberfläche reduzieren sich einfach auf zwei bezw. auf den Endflächen A und B verteilte Massen. Wenn wir mit J_a und J_b die Werte von J auf den Endflächen A und B bezeichnen und a den Flächeninhalt des Querschnittes des Stabes nennen, so sind die beiden magnetischen Massen

$$m_a = aJ_a \quad \text{und} \quad m_b = aJ_b.$$

Im Innern des Stabes, in dem von zwei bestimmten Schnitten M und P begrenzten Teile, hat man eine Menge von freiem Magnetismus, welche gleich der Differenz zwischen dem Flusse der Magnetisierung, der in diesen Teil durch den Schnitt M ein-, und dem Flusse, der aus demselben durch den Schnitt P austritt, ist. Wenn J_m und J_p die Werte der Intensität der Magnetisierung in den beiden Schnitten sind, so ist die Menge von freiem Magnetismus zwischen M und P gleich

$$aJ_m - aJ_p = a(J_m - J_p).$$

ir die Werte von J in den verschiedenen Schnitten des Stabes
ie Ordinaten Aa, Mm, $Pp, \cdots$, Bb einer Linie $amp \cdots b$ dar-
so ist die Differenz $J_m - J_p$ in der Figur durch die Strecke pq
welche auf Pp durch den Schnitt mit der zu AB parallelen
mq erhalten wird. In unserer Figur ergiebt sich die so be-
magnetische Masse negativ. Dasselbe Resultat erhält man, indem
ere an der Seite AC gelegene Teile des Stabes betrachtet, längs
in der Richtung der Magnetisierung fortschreitend, J zunimmt.
ı Teile dagegen, der rechts vom Punkte C liegt, und in dem J
, findet man eine positive Menge von freiem Magnetismus

$$a(J_m - J_p) = a \cdot q'm'.$$

rschnitt C, in welchem die Magnetisierung die grösste Intensität
eilt den Stab in zwei Teile, von denen der eine Süd-, der andere
gnetismus frei verteilt enthält.
ses Beispiel weist uns auf die Notwendigkeit hin, zwischen
ierung und Menge des freien Magnetismus scharf zu unter-
; letztere hängt nicht von der absoluten Grösse der ersteren,
nur von ihren Variationen ab. Die Menge von freiem Magne-
st Null, wo die Stärke der Magnetisierung konstant ist, und ein
n, wo J am stärksten variiert.
mittlere Menge des freien Magnetismus für jede parallel zur
wischen den Querschnitten M und P gemessene Längeneinheit ist

$$a \frac{J_m - J_p}{MP}.$$

en wir mit x den Abstand eines beliebigen Schnittes von der
und setzen wir voraus, dass die Entfernung zwischen den beiden
ı M und P unendlich klein, gleich dx sei, dann ist das Verhältnis

der Differentialquotient der Funktion J nach x, folglich geht
ge Ausdruck in

$$-a \frac{dJ}{dx}$$

mit hat man die Menge des freien Magnetismus für die Längen-
in dem Schnitte mit der Abscisse x ausgedrückt. Wenn die
ierung in der ganzen Länge des Stabes konstant ist, so ist die
ı beliebigen Teile des Volumens des Magneten verteilte Menge
em Magnetismus gleich Null, wie schon angegeben. Stellen wir
liesem Falle vor, dass der Stab kreisförmig gebogen und an den
Enden zusammengelötet werde, sodass sich ein Ring ergebe, und

ferner, dass die Magnetisierungslinien sich auch aus geraden Linien in konzentrische Kreise umwandeln und die Stärke der Magnetisierung längs jedes derselben konstant bleibe, dann heben sich auch die beiden entgegengesetzt gleichen magnetischen Massen auf, welche in dem gleichförmigen, geradlinigen Stabmagneten an den Enden vorhanden waren, und dann enthält der Magnet keine freie magnetische Masse mehr. Wie gross auch die Stärke der Magnetisierung sein möge, der Magnet übt nach aussen keine Kraft aus.

75. Potential, das von einem Elementarmagneten herrührt. Allgemeiner Ausdruck für das von einem beliebigen Magneten herrührende Potential. — Wenn die Richtung und die Stärke der Magnetisierung in allen Punkten eines Magneten oder eines Systems von Magneten gegeben sind, so genügt dies zur vollständigen Definierung des Magneten oder des Systems; ebenso wie die äusseren Wirkungen, sind auch die inneren Zustände der einzelnen Magnete bestimmt. Wir haben in der That gesehen, wie man die Verteilung des freien Magnetismus im Innern und auf der Oberfläche der Magnete berechnet; wenn die Massen, welche das Feld erzeugen, auf diese Weise bekannt sind, kann man die Kraft und das Potential in jedem Punkte bestimmen, und zwar durch Anwendung der bekannten Beziehungen der Newton'schen Kraftfelder.

Wir können die von dem System der Magnete herrührenden, äusseren Wirkungen auch auf andere Weise berechnen, indem wir beachten, dass dieselben die Resultierenden aus den Wirkungen sind, welche von den Elementarmagneten, in welche die Magnete zerteilt gedacht werden können, herrühren. Es ist wichtig zu wissen, wie man das in einem Punkte von einem Elementarmagneten hervorgebrachte Potential berechnen kann.

Es möge $d\mathfrak{M}$ das magnetische Moment und dv das Volumen eines Elementarmagneten darstellen, in welchem die Stärke der Magnetisierung den Wert J besitzt. Nach dem Gesagten [69] kann der Magnet durch zwei magnetische Massen $+dm$ und $-dm$ ersetzt werden, welche in den Mittelpunkten N und S (Fig. 69) der Endseiten des Elementes konzentriert sind. Die Punkte N und S liegen in der Richtung von J im Abstand l von einander; die Masse dm genügt der Bedingung $dm = Jda$ oder $d\mathfrak{M} = ldm$. Wir bezeichnen mit r bezw. r_1 die Entfernungen (die wir endlich voraussetzen) eines beliebigen Punktes P von den Polen N und S, mit Θ den Winkel, den die Gerade PS mit der Richtung der Magnetisierung bildet.

Nach der allgemeinen Formel (2) [62]

$$V = \sum \frac{m}{r}$$

er Wert des Potentials in P aus zwei Gliedern, deren eines der handenen positiven Masse dm, das andere der in S vorhandenen Masse $-dm$ entspricht;
lt daher

$$-\frac{dm}{r_1} = dm\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_1}\right).$$

an nun um P als Zen- dem Radius PN einen en NQ schlägt, so fällt er unendlich klein ist, von N auf SP gefällten mmen; es entsteht da-

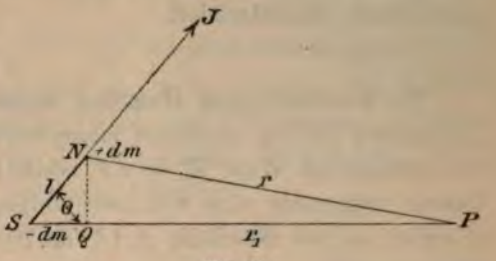


Fig. 69.

s unendlich kleine rechtwinklige Dreieck SNQ, worin $SQ =$ t. Man hat daher

$$r_1 = PS = PQ + QS = r + l\cos\Theta$$

m man diesen Wert in den Ausdruck von V einsetzt,

$$V = dm\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r + l\cos\Theta}\right)$$

, weil l gegen r verschwindend klein ist,

$$V = \frac{l\,dm\cos\Theta}{r^2} = \frac{d\mathfrak{M}\cos\Theta}{r^2}.$$

Wert des in einem Punkte von einem Elementarmagneten hervor- n Potentials hängt demnach nur von dem magnetischen Moment, Richtung der Magnetisierung und von der Entfernung des Punktes gneten selbst ab. Derselbe ist positiv oder negativ, je nachdem Θ r oder ein stumpfer Winkel ist, d. h. je nachdem der betrachtete m Nord- oder dem Südpol des Elementarmagneten näher ist.
n man $d\mathfrak{M}$ durch seinen Wert $J dv$ ersetzt, so wird der Aus- s Potentials

$$V = \frac{J\cos\Theta\, dv}{r^2}.$$

ein beliebiges System von Magneten gegeben, so ist das von n in einem äusseren Punkte hervorgebrachte Potential die Summe tiale, welche von den die einzelnen Magnete bildenden Elementar- herrühren; es ist daher für ein beliebiges System von Magneten

$$V = \int \frac{J\cos\Theta}{r^2} dv,$$

h das Integral über das ganze von den Magneten eingenommene erstreckt.

Wenn man auf diese Weise die Werte des Potentials berechnet hat, wird man leicht die Werte der Kraft in den einzelnen Punkten und folglich die Energie des Systems ermitteln können. Das Feld ist somit hinreichend charakterisiert.

76. Das von einem einfachen magnetischen Blatte erzeugte Feld. — Betrachten wir ein einfaches magnetisches Blatt, auf welchem die Potenz den konstanten Wert $\mathfrak{P} = nJ$ besitzt; die Massen von freiem Magnetismus reduzieren sich auf zwei entgegengesetzt gleiche [73], die eine, positive, auf der Nordseite AA (Fig. 70) und die andere, negative, auf der Südseite BB.

Auf der positiven Seite nehmen wir ein Flächenelement aa von dem Oberflächeninhalt dS, wo die Dicke des Blattes n und die Stärke der Magnetisierung J ist. Ein durch die Begrenzung aa gelegter Zylinder, dessen Mantellinie senkrecht zum Blatte, d. h. parallel zu der Magnetisierung ist, schneidet auf der Seite BB ein Flächenelement $bb = dS$ aus. Dadurch wird einer der das Blatt bildenden Elementarmagnete abgesondert. Auf den beiden Seiten des Elementes hat man entgegengesetzt gleiche magnetische Massen vom absoluten Werte $dm = JdS$, die in den Mittelpunkten der Seitenflächen selbst im Abstande n von einander konzentriert gedacht werden können; das magnetische Moment des Elements ist daher

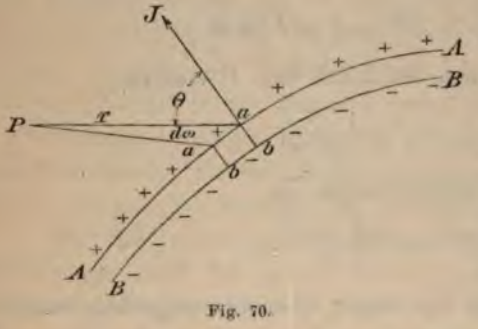


Fig. 70.

$$d\mathfrak{A} = ndm = nJdS = \mathfrak{P}dS,$$

woraus sich ergiebt:

$$\mathfrak{P} = \frac{d\mathfrak{A}}{dS}. \tag{13}$$

Aus dieser Beziehung geht eine wichtige Bedeutung der magnetischen Potenz hervor:

Die magnetische Potenz in einem gegebenen Punkte eines magnetischen Blattes ist der Wert des magnetischen Momentes, auf die Flächeneinheit bezogen.

Wenn man einen Punkt P in der Entfernung r von dem Element aa betrachtet und mit Θ den von der Geraden Pa mit der Richtung

von J eingeschlossenen Winkel bezeichnet, so ist nach der Formel (11) das von dem Element herrührende Potential in P

$$V = \frac{d\mathfrak{A}\cos\Theta}{r^2} = \mathfrak{P}\frac{dS\cos\Theta}{r^2}.$$

Nun hat der Ausdruck $\frac{dS\cos\Theta}{r^2}$ eine bemerkenswerte geometrische Bedeutung [22]; es ist der Raumwinkel $d\omega$, unter welchem das Flächenelement dS vom Punkte P aus gesehen wird, oder die scheinbare Flächengrösse $d\omega$ des Elementes dS, von P aus gesehen. Den Ausdruck des Potentials kann man also unter die Form bringen

$$V = \mathfrak{P}d\omega. \tag{14}$$

Das von dem Element herrührende Potential ist positiv oder negativ, je nachdem Θ ein spitzer oder ein stumpfer Winkel ist, d. h. je nachdem man von dem betreffenden Punkte aus an der betrachteten Stelle auf die Nord- oder die Südseite sieht.

Wir haben so den Teil des Potentials berechnet, welcher von dem Element dS herrührt. Das Potential, das von dem ganzen Blatte hervorgerufen wird, ist die Summe der von den einzelnen Elementen herrührenden Potentiale; es ist also gleich dem Produkte aus der Konstanten $\mathfrak{P}$ und der Summe der scheinbaren Flächeninhalte $d\omega$. Wenn wir diese Summe, d. h. den scheinbaren Flächeninhalt des ganzen Blattes, vom Punkte P aus gesehen, mit dem Buchstaben ω bezeichnen, so wird das Potential in P, abgesehen von einer willkürlichen Konstanten, durch die Formel

$$V = \mathfrak{P}\omega \tag{15}$$

ausgedrückt.

Bei der Berechnung des Raumwinkels ω muss man die Teile des Blattes, von welchen die positive Seite von P aus gesehen wird, von den Teilen, von welchen die negative Seite von P aus gesehen wird, unterscheiden, die scheinbaren Grössen der ersten als positiv, die der anderen als negativ in Ansatz bringen und die algebraische Summe bilden.

So muss man z. B. bei Figur 71 als positiv den ganzen Raumwinkel des dem Blatte tangentialen Kegels PMN annehmen, in welchem man von P aus den Teil MQN der positiven Seite sieht; von diesem muss man dann den Raumwinkel abziehen, welcher dem zwischen den Kegelmänteln PMN und PAB eingeschlossenen Raume entspricht, weil man in diesem Raume von

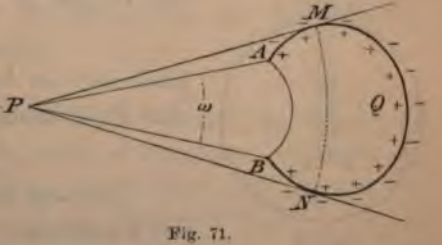


Fig. 71.

P aus den ringförmigen Teil $AMBN$ der negativen Seite sieht. Was übrig bleibt, ist der Raumwinkel des Kegels PAB, welcher die Begrenzung AB des magnetischen Blattes als Direktrix hat. Dieses Beispiel giebt uns eine sehr einfache Regel an die Hand, um in jedem Falle ohne Subtraktionen den Wert und das Vorzeichen von ω bestimmen zu können: der Raumwinkel ω, den man in die Formel (15) einsetzen soll, ist derjenige des Kegels mit der Spitze in P, welcher die Begrenzung des magnetischen Blattes als Direktrix hat. Das Vorzeichen von ω ist das Vorzeichen derjenigen Seite, die man in diesem Kegel sieht.

Das Potential hängt nicht von der Form und den Dimensionen des Blattes, sondern nur von dessen Potenz und dessen Begrenzung ab. Alle unendlich viele magnetische Blätter, die gleiche Potenz und gleiche Begrenzung haben, bringen in einem Punkte Potentiale hervor, die denselben absoluten Wert haben; das Vorzeichen des Potentials hängt hierbei nur von der Richtung der Magnetisierung ab.

Betrachten wir ein in sich geschlossenes magnetisches Blatt; der Raumwinkel, unter welchem die Begrenzung gesehen wird, ist gleich Null für einen Punkt ausserhalb und gleich 4π für einen Punkt innerhalb des vom Blatte eingeschlossenen Raumes; ein geschlossenes magnetisches Blatt bringt ein konstantes Potential $V = \pm 4\pi\mathfrak{P}$ in jedem innerhalb, und ein Potential, das ebenfalls konstant, jedoch gleich Null ist, in jedem ausserhalb jenes Raumes gelegenen Punkte hervor.

Da das Potential konstant ist, ist sein Differentialquotient und folglich die magnetische Kraft gleich Null.

Wenn wir ein mit ebenen und parallelen Seiten versehenes Blatt betrachten, so haben wir in einem der Nordseite unendlich nahe und von der Umrandung weit entfernt gelegenen Punkte P (Fig. 72) $\omega = 2\pi$ und daher

$$V = 2\pi\mathfrak{P};$$

Fig. 72.

in einem bei der Südseite symmetrisch zu P liegenden Punkte P' hat das Potential dagegen den Wert

$$V' = -2\pi\mathfrak{P}.$$

Zwischen den beiden Punkten P und P' besteht also eine Potentialdifferenz

$$V - V' = 4\pi\mathfrak{P}.$$

Dies sagt uns, dass die Kräfte des Feldes während des Überganges der magnetischen Einheitsmasse von P bis P' längs einer beliebigen Linie PMP', welche ganz ausserhalb des Blattes liegt, eine Arbeit $4\pi\mathfrak{P}$ leisten; eine gleiche Arbeit muss von äusseren Kräften verrichtet werden, wenn man die Ein-

von P' wieder zum Punkte P zurückbringen will, ohne durch hindurchzugehen.

betrachte ein einfaches magnetisches Blatt von der Potenz $\mathfrak{P}$; von ihm herrührende Potential in einem Punkte P. Wenn in nkte eine nordmagnetische Masse m konzentriert ist, und wir em vom Blatte erzeugten Felde oder, was dasselbe ist, das em von der Masse erzeugten Felde beweglich ansehen, so ist e des Systems [21]

$$W = mV = m\mathfrak{P}\omega .$$

mehrere magnetische Massen, anstatt einer einzigen Masse m, les Blattes vorhanden sind, so ist die Energie durch

$$W = \sum \mathfrak{P} m\omega ,$$

$\mathfrak{P}$ konstant ist, durch

$$W = \mathfrak{P} \sum m\omega$$

vobei die Summe über alle magnetische Massen m ausgedehnt st $m\omega$ [22] der von der magnetischen Masse m hervorgebrachte durch die Fläche des Blattes; wenn wir durch Φ den gesamten agnetischen Massen des Feldes hervorgebrachten Magnetisierungs- ı diese Fläche, d. h. die algebraische Summe der von den ein- gnetischen Massen erzeugten Flüsse darstellen, indem wir die ›rdseite ankommenden Flüsse als positiv und die auf der Süd- mmenden als negativ betrachten, so wird die Energie des ırch den Ausdruck

$$W = \mathfrak{P}\Phi$$

otentielle Energie eines einfachen magnetischen Blattes in einem n Felde wird, abgesehen von einer Konstanten, durch das Produkt otenz des Blattes und dem Kraftflusse, der im Felde auf der les Blattes ankommt, ausgedrückt.

das magnetische Blatt sich im Felde bewegt, so variiert die Energie mit dem Flusse Φ; wenn Φ abnimmt, so leisten die Feldes eine positive Arbeit auf Kosten der Energie des nimmt dagegen Φ zu, dann müssen äussere Kräfte eine Arbeit lche die potentielle Energie vermehrt. Im allgemeinen ist die ıng der Energie, d. h. die positive, von den Kräften des Feldes Arbeit, wenn das Blatt von einer beliebigen Lage, wo der Fluss

den Wert Φ_1 besitzt, zu einer anderen übergeht, wo der Wert des Flusses Φ_2 beträgt, ausgedrückt durch

$$W_1 - W_2 = \mathfrak{P}(\Phi_1 - \Phi_2).$$

Wenn das Blatt sich selbst überlassen wird, wenn es also frei beweglich ist, dann verschieben die Feldkräfte dasselbe derart, dass sie eine positive Arbeit leisten; dadurch nimmt die Energie des Systems und ebenso der Fluss Φ ab. Das Blatt sucht eine Lage stabilen Gleichgewichtes anzunehmen, welcher ein Minimum der potentiellen Energie, d. h. ein Maximum des negativen Wertes des Flusses entspricht; eine weitere Verschiebung des Blattes kann ohne Aufwand einer von äusseren Kräften verrichteten Arbeit nicht mehr eintreten. So stellt sich z. B. im erdmagnetischen Felde ein zuvor vertikal angeordnetes ebenes Blatt, das sich um eine vertikale Achse frei zu drehen vermag, senkrecht zu der magnetischen Meridianebene, mit der Südseite nach dem geographischen Südpol gewendet; in dieser Lage kommen alle Flusslinien auf der Südseite an.

---

§ 3.

Kräfte im Innern eines Magneten. Magnetische Induktion.

77. Magnetisches Feld im Innern der Magnete. — Die im vorigen Paragraphen enthaltenen Erörterungen über die Konstitution der Magnete und die Verteilung des Magnetismus in denselben haben uns gezeigt, wie man ein von gegebenen Magneten erzeugtes Feld studieren kann, in dessen sämtlichen Punkten die Richtung und die Intensität der Magnetisierung bekannt sind. Wir werden sehen, wie man durch elektrische Ströme magnetische Felder ohne Magnete und magnetische Massen erzeugen kann, und werden untersuchen, wie man die Feldstärke berechnet, wenn die Stromstärken und die Form der Strombahnen gegeben sind. Wir werden dann imstande sein, die magnetischen Felder in jeder Weise zu untersuchen und jedes Problem in bezug auf die Verteilung der magnetischen Massen, auf die Werte der Kräfte und des Potentials in den einzelnen Punkten, und auf die Arbeit und die Energie des Systems zu lösen.

Dies gilt so lange, wie wir von dem magnetischen Felde reden, welches ausserhalb der Magnete liegt, so lange wir nämlich in der Luft oder allgemein in einem uns zugänglichen Medium bleiben. In der That setzt schon die Definition der magnetischen Kraft in einem Punkte voraus, dass man experimentell in diesem Punkte die Einheit der magnetischen Masse anbringen könne. Wenn wir daher einer experimentellen

Prüfung unzugängliche und im besonderen innerhalb der Magnete gelegene Punkte ins Auge fassen, so hören die für die Felder in der Luft gegebenen Definitionen und Sätze auf, eine durch das Experiment wahrnehmbar zu machende Bedeutung zu haben, und es wird nötig, hier neue besondere Vereinbarungen zu treffen. Das Übereinkommen, das am nächsten liegt, besteht darin, dass man auch auf den Raum innerhalb der Magnete die Definitionen ausdehnt, die für den Raum ausserhalb der Magnete gelten. Von dem Newton'schen Begriffe der Massen eines beliebigen Agens ausgehend, liegt die Annahme nahe, dass die Kraft nicht von der Natur der Substanz in dem Punkte, sondern nur von der Verteilung der magnetischen Massen oder der elektrischen Ströme, die das Feld erzeugen, abhängt. Wir denken uns vornehmlich die vorhandene Materie in ihrer Ausdehnung durch Luft ersetzt und nehmen ferner an, dass die magnetischen Massen und die elektrischen Ströme durch diesen Ersatz nicht verändert werden, d. h. dass die magnetischen Massen und elektrischen Ströme unabhängig von ihren materiellen Trägern bestehen. Unter diesen Voraussetzungen können wir sagen:

Magnetische Kraft oder *Feldstärke* in einem der Prüfung durch die Einheit der magnetischen Masse unzugänglichen und im besonderen in einem innerhalb eines Magneten gelegenen Punkte ist die Kraft, die in demselben auf die dort befindlich gedachte magnetische Einheitsmasse wirken würde, wenn man die in jenem Punkte vorhandene Materie durch Luft ersetzen könnte, ohne die Verteilung der magnetischen Massen und der elektrischen Ströme im Raume zu verändern.

Die soeben gegebene Definition ist abstrakt, aber mathematisch genau. Wenn wir uns auf den Fall von magnetischen Feldern beschränken, welche von Magneten herrühren, und wenn die Verteilung der magnetischen Massen oder des Vektors J gegeben ist, so werden wir die Kraft in jedem Punkte des Feldes jeweilig berechnen können, welcher Art die Materie, die sich in dem betrachteten Punkte befindet, auch sei. Obwohl die magnetische Kraft auf diese Weise überall mit Genauigkeit definiert ist, wird sie doch in den Punkten innerhalb der Magnete durch Untersuchung mit einer Prüfmasse praktisch nicht gemessen werden können. In der That ist es nötig, um in einen innerhalb eines Magneten gelegenen Punkt einen magnetischen Einheitspol bringen zu können, im Magneten selbst um den betrachteten Punkt eine Höhlung herzustellen. Es ist wohl richtig, dass die auf diese Weise entfernte magnetische Masse gleich Null ist, weil das abgetrennte Stück für sich einen vollständigen Magneten bildet, aber auf der Fläche der Höhlung zeigt sich jetzt eine Verteilung von freiem Magnetismus, welche vorher von einer entgegengesetzt gleichen Verteilung auf der Oberfläche des entfernten Stückes aufgehoben wurde.

Indessen ist die Kraft, die in der Höhlung auf die Prüfmasse wirkt, nicht die Feldstärke, wie wir sie definiert haben, sondern die Resultante aus der letzteren und der Kraft, welche von den magnetischen Massen herrührt, die durch die Herstellung der Höhlung frei geworden sind.

Aus der gegebenen Definition ergiebt sich, dass die magnetische Kraft in jedem Punkte des Feldes eine Newton'sche Kraft ist; wir können daher auch auf das Innere der Magnete alle Sätze, die wir allgemein über die Newton'schen Felder aufgestellt haben, ausdehnen, d. h. wir werden keinen Unterschied zwischen dem Innern und Äussern der Magnete machen; wir werden z. B. auf einen beliebigen Teil des Raumes ohne weiteres die Theoreme von Gauss und Stokes anwenden können.

Aus den Eigentümlichkeiten des Newton'schen Feldes selbst ergiebt sich sofort, dass die magnetische Kraft nicht allgemein solenoidische Verteilung haben kann, weil der Kraftfluss, welcher aus einer geschlossenen, in ihrem Innern eine von Null verschiedene Anzahl von magnetischen Massen enthaltenden und sonst beliebigen Fläche austritt, nicht Null ist. Aber noch mehr, die magnetische Kraft ist nicht nur nicht solenoidisch verteilt, sondern auch nicht stetig; und zwar sind die Oberflächen der Magnete immer dann singuläre Flächen, wenn die zu der Oberfläche senkrechte Komponente der Magnetisierung nicht Null ist.

SS sei (Fig. 73) die Trennungsfläche zwischen einem Magneten und der Luft. Betrachten wir zwei einander unendlich nahe gelegene Punkte P und P', von denen der erste innerhalb, der zweite ausserhalb des Magneten liegt. Es seien bezw. $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}'$ die Werte der magnetischen Kraft in P und P'; $\mathfrak{K}_n$ und $\mathfrak{K}_n'$ ihre Komponenten nach der Normalen zu der Fläche SS, und zwar als positiv angenommen, wenn sie vom Magneten nach aussen gerichtet sind. Auf der Fläche SS betrachten wir ein zwischen den Punkten P und P' liegendes Element AB von der Flächengrösse dS und setzen wir voraus, dass die Entfernungen der Punkte P und P' von dem Element im Vergleiche mit den Dimensionen von dS verschwindend klein sind. Auf der Fläche dS ist eine Masse von freiem Magnetismus $dm = \sigma dS = J_n dS$ verteilt.

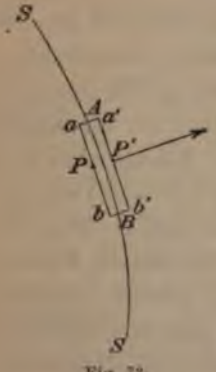


Fig. 73.

Wenden wir auf die geschlossene Fläche, die von den durch P und P' parallel zu dS gelegten Ebenen und von der durch die Begrenzung AB senkrecht zu dS beschriebenen zylindrischen Fläche gebildet ist, das Gauss'sche Theorem an. Der aus der Seitenfläche des Zylinders $aa'b'b$ austretende Fluss ist unendlich klein und kann gegen die Flüsse $\mathfrak{K}_n' dS$

und $-\mathfrak{H}_n dS$, die bezw. aus den Grundflächen $a'b'$ und ab austreten, vernachlässigt werden. Der Satz von Gauss giebt uns alsdann

$$(\mathfrak{H}_n' - \mathfrak{H}_n)\, dS = 4\pi k dm = 4\pi k J_n dS,$$

woraus folgt:

$$\mathfrak{H}_n' - \mathfrak{H}_n = 4\pi k J_n$$

und

$$\mathfrak{H}_n' = \mathfrak{H}_n + 4\pi k J_n. \tag{17}$$

Hieraus ergiebt sich, dass die magnetische Kraft in den beiden einander unendlich nahe gelegenen Punkten P und P' verschiedene Werte besitzt und für gewisse Werte von J sogar entgegengesetzte Richtungen haben kann. Die Oberflächen der Magnete sind also immer singuläre Flächen, wenn auf denselben eine Verteilung von freiem Magnetismus vorhanden ist, d. h. wenn die Normalkomponente der Magnetisierung nicht Null ist. Die Kraftlinien im Innern der Magnete sind nicht die Verlängerungen der äusseren Kraftlinien; während die Zahl der auf die Flächeneinheit kommenden Kraftlinien ausserhalb des Magneten $\mathfrak{H}'$ beträgt, ist sie innerhalb desselben $\mathfrak{H}$.

Dieselbe Beziehung (17) lässt uns ersehen, dass die beiden Vektoren $\mathfrak{H}$ und J, vom physikalischen Standpunkte aus betrachtet, Grössen von verschiedener Natur sind, eben weil der Faktor k nicht eine einfache Zahl, sondern eine physikalische Grösse ist. Nur in dem Masssystem, in welchem k als eine einfache Zahl angesehen wird, werden $\mathfrak{H}$ und J homogene Grössen d. h. Grössen von gleicher physikalischer Dimension, weil man dann, indem man k gleich der Einheit setzt, zu der Gleichung gelangt:

$$\mathfrak{H}_n' = \mathfrak{H}_n + 4\pi J_n; \tag{17'}$$

dies ist aber lediglich eine von uns gemachte Annahme.

78. Vektoren mit solenoidischer und stetiger Verteilung. — Die beiden Vektoren, die wir bis jetzt in den magnetischen Feldern betrachtet haben, d. h. die magnetische Kraft $\mathfrak{H}$ und die Magnetisierung J besitzen eine solenoidische und stetige Verteilung nur dort, wo keine freien magnetischen Massen existieren. Das weitere Studium der magnetischen Felder wird sich einfacher gestalten, wenn es gelingt, durch zweckentsprechende Kombination beider Vektoren einen Vektor zu finden, welcher stetig und solenoidisch in dem ganzen Felde verteilt ist.

Wir betrachten eine geschlossene, im magnetischen Felde in bezug auf die Magnete beliebig gelegene Fläche S und bezeichnen mit m die Menge von freiem Magnetismus, die innerhalb dieser Fläche enthalten ist,

und mit Φ_h bezw. Φ_i den Kraft- bezw. den Magnetisierungsfluss, welc
aus derselben austritt. Nach dem Gauss'schen Satze hat man dann

$$\Phi_h = 4\pi k m;$$

und weil die Masse, die innerhalb einer geschlossenen Fläche enthalt
ist, gleich dem in sie eintretenden Flusse von J ist [74], gilt auch

$$\Phi_i = -m.$$

Der aus S austretende Fluss des Vektors $4\pi k J$, den man erhält, ind
man J mit dem Skalarfaktor $4\pi k$ multipliziert, ist

$$4\pi k \Phi_i = -4\pi k m,$$

und der Fluss des aus den beiden Vektoren $\mathfrak{H}$ und $4\pi k J$ resultierend
Vektors ist gleich Null:

$$4\pi k \Phi_i + \Phi_h = -4\pi k m + 4\pi k m = 0,$$

und dies ist der Fall, wie auch immer die Fläche S beschaffen und g
legen sei. Dieser resultierende Vektor hat also solenoidische und fo
lich stetige Verteilung im ganzen Raume. Die Flussröhren und -lini
schliessen sich in sich selbst zusammen in endlicher oder unendlich
Entfernung; sie bieten keine Singularität, auch nicht auf der Ob
fläche der Magnete, und sind von konstantem Flusse durchsetzt. Die
Eigenschaften gelten nicht nur für den aus $\mathfrak{H}$ und $4\pi k J$ resultierend
Vektor, sondern auch für jeden anderen, den man aus ihm dadurch e
mitteln kann, dass man ihn mit einer beliebigen skalaren Konstant
multipliziert.

Dieser Skalarfaktor kann anstatt einer Zahl, eine physikalisc
Grösse mit gewissen Dimensionen sein; man wird ihn immer so wähl
können, dass der solenoidische und stetige Vektor vorausbestimm
physikalische Dimensionen erhält.

Unter allen diesen Vektoren verdienen zwei besondere Beachtun
und zwar der *aus* $\mathfrak{H}$ *und* $4\pi k J$ *resultierende Vektor* $\mathfrak{B}$ und der *aus* $\mathfrak{H}$
und $4\pi J$ *resultirerende Vektor* $\mathfrak{B}$, welche ermittelt werden, indem ma
den konstanten Faktor bezw. gleich 1 und $\frac{1}{k}$ setzt.

**79. Polare und elektromagnetische Definition der magnetischen Kraf
Kräfte im Innern von Höhlungen in Magneten.** — Betrachten wir zuer
den aus $\mathfrak{H}$ und $4\pi k J$ resultierenden Vektor $\mathfrak{B}$, welcher, wie ja aus seine
Definition hervorgeht, eine Grösse derselben Natur wie die magnetische
Kräfte ist.

Um zu einer physikalischen Deutung des Vektors $\mathfrak{B}$ zu gelange
ist es erforderlich, dass wir den Wert der Kraft in einem Punkte ein

Höhlung im Innern eines Magneten berechnen, einer Kraft, die, wie schon bemerkt, in jenem Punkte von der Feldstärke $\mathfrak{H}$ verschieden ist.

In einem Magneten denken wir uns eine zylindrische Höhlung $ABCD$ (Fig. 74) hergestellt, deren Basis kreisförmig sei, und deren Achse in der Richtung der Magnetisierung liege. Nehmen wir an, die Höhlung sei so klein, dass die Magnetisierung in allen Punkten des entfernten Stückes und der Fläche der Höhlung als konstant der Grösse und Richtung nach angesehen werden kann, und setzen wir ferner voraus, dass die Höhlung gemacht worden sei, ohne die Verteilung der Magnetisierung in den anderen Teilen des Magneten im geringsten zu verändern.

Man hat auf diese Weise auf den beiden Grundflächen des Zylinders gleiche und ungleichnamige Verteilungen, eine nordmagnetische auf CD, eine südmagnetische auf AB, frei gemacht, welche nach den gemachten Voraussetzungen konstante Dichte $\sigma = J$ besitzen.

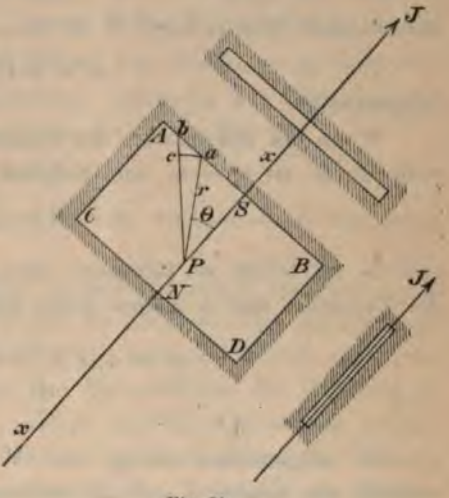


Fig. 74.

Wenn wir die magnetische Masse *Eins* in einem auf der Achse xx der Höhlung gelegenen Punkte P betrachten, so ist die Kraft, deren Wirkung diese Masse ausgesetzt ist, die Resultierende aus zwei anderen Kräften, nämlich aus der Kraft $\mathfrak{H}$, die von den vor der Bildung der Höhlung vorhanden gewesenen magnetischen Massen oder elektrischen Strömen herrührt, und aus der Kraft R, welche aus der neuen Verteilung auf den beiden Seiten hervorgeht. Die Kraft R soll nach der Achse xx von N nach S gerichtet sein. Um sie zu berechnen, betrachten wir zuerst eine der Grundflächen, AB. Ein beliebiges Element ab derselben vom Inhalte dS in der Entfernung r von P enthält eine Masse $\sigma dS = JdS$, welche in P eine Kraft $= k\frac{JdS}{r^2}$ ausübt. Die Kraft in P, die von allen auf der Seite AB verteilten Massen herrührt, ist die Resultierende der von den einzelnen Elementen herrührenden Kräfte; und da wir wissen, dass die Resultante nach der Achse xx gerichtet ist, wird es genügen, die Projektionen der einzelnen Komponenten auf die Richtung xx zu betrachten und sie algebraisch zu addieren. Die auf diese Weise gebildete Komponente der Kraft, die vom Element ab herrührt, ist

$$k\frac{JdS}{r^2}\cos\Theta = kJd\omega,$$

worin $d\omega$ den scheinbaren Flächeninhalt von dS, vom Punkte P aus gesehen [22], bedeutet. Wenn wir die Summe aller dieser Elementarkomponenten bilden und mit $\omega = \int d\omega$ den scheinbaren Flächeninhalt von AB, von P aus gesehen, bezeichnen, so ist die in P von den auf AB verteilten Massen erzeugte Kraft $kJ\omega$.

Analog greifen die auf CD verteilten Massen die Einheitsmasse in P mit einer Kraft $kJ\omega'$ an, wenn man mit ω' den Raumwinkel, unter welchem die Basis CD vom Punkte P aus gesehen wird, bezeichnet. Im ganzen also ist die Kraft R durch

$$R = kJ(\omega + \omega')$$

ausgedrückt.

Wenn im besonderen der Punkt P sich im Mittelpunkte der Achse befindet, so ist $\omega = \omega'$ und folglich

$$R = 2kJ\omega,$$

und es ist leicht zu beweisen, dass, wenn a der Durchmesser der Basis des Zylinders und h dessen Höhe ist, die Beziehung besteht:

$$R = 4\pi kJ\left[1 - \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{a}{h}\right)^2}}\right].$$

Im allgemeinen hängt der Wert der Kraft R von den Raumwinkeln der beiden Kegel ab, welche den Punkt P als Spitze haben und die Grundflächen des Zylinders umschreiben, d. h. von dem Verhältnisse $\frac{a}{h}$ des Durchmessers der Basis zur Höhe des Zylinders.

Zwei Grenzfälle sind besonders wichtig, nämlich der, dass der Quotient $\frac{a}{h}$ unendlich klein, und jener, dass dieser Quotient unendlich gross ist.

Der erste Fall entspricht einem kleinen, parallel zur Richtung der Magnetisierung gelegenen Hohlzylinder mit einer im Vergleich zur Höhe verschwindend kleinen Basis. Man hat dann $\omega = \omega' = 0$, daher $R = 0$; die Kraft reduziert sich auf diejenige, die man in dem Punkte hätte, wenn keine Höhlung hergestellt worden wäre, d. h. auf die magnetische Kraft $\mathfrak{H}$ in jenem Punkte.

Wenn die Höhlung unendlich dünn ist, so gilt das Gesagte auch dann, wenn sie nicht zylindrisch ist, weil sie immer als aus zylindrischen Teilen bestehend angesehen werden kann. Wenn man sich daher im Magneten einen kleinen Kanal längs einer Flussröhre denkt, so würde in jedem seiner Punkte die zur Prüfung der Magnetisierungsverhältnisse eingebrachte

he Masse *Eins* von einer Kraft angegriffen werden, welche gleich etischen Kraft in dem Punkte ist. Es geht daraus eine weniger Definition der magnetischen Feldstärke im Innern der Magnete

sität des magnetischen Feldes oder magnetische Kraft in einem Innern der Magnete ist die Kraft, die in diesem Punkte auf t der magnetischen Masse wirkt, wenn sich durch den Punkt ein dünner Kanal längs einer Magnetisierungslinie hinzieht.

zweite Grenzfall, bei welchem der Quotient $\frac{a}{h}$ unendlich gross richt einem Zylinder mit einer im Vergleich zum Durchmesser fläche verschwindend kleinen Höhe. Der Hohlraum ist jetzt eine dünne, tellerförmige Aussparung, senkrecht zur Richtung der erung. In diesem Falle hat man $\omega = \omega' = 2\pi$ und

$$R = 4\pi k J.$$

R stellt also den zweiten Vektor dar, welcher als Komponente iftritt.

sen stellt uns der Vektor $\mathfrak{B}$, der aus $\mathfrak{H}$ und R resultiert (d. h. raft, die von den vorherbestehenden magnetischen Massen oder n Strömen und aus der Kraft, die von den beiden entgegengeichen Verteilungen, die auf den Grundflächen der Höhlung zu n, herrührt), die Kraft dar, welche auf die Einheit der magnesse wirken würde, wenn letztere in einen Punkt im Innern ndlich dünnen, im Magneten befindlichen, senkrecht zur Magnegerichteten Höhlung gebracht wäre.

der auf Teilen des Umfangs der Grundfläche vorhandene Magauf einen Punkt der Achse eine im Vergleich zu derjenigen, mit er in den Zentralteilen vorhandene Magnetismus wirkt, verl kleine Kraft ausübt, so leuchtet ss die Kraft auch dann noch die- ot, wenn die Grundflächen nicht g, sondern beliebig gestaltet sind, einzigen Bedingung, dass ihre Di- gegen die Höhe des Zylinders gross sind.

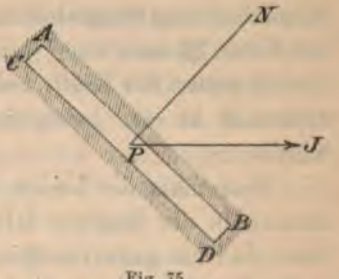


Fig. 75.

können diese Aussage verallgemeibeweisen, dass die Komponente des ich einer beliebigen Richtung PN gleich der nach PN gebildeten Komponenten derjenigen Kraft uf die magnetische Einheitsmasse in einer senkrecht zu PN

ausgesparten, unendlich dünnen Höhlung $ABCD$ wirken würde. In der That üben die Massen von freiem Magnetismus, die auf der zylindrischen Fläche der Höhlung vorhanden sind, wenn die Höhe der letzteren gegen die Basis derselben verschwindend klein ist, auf den Punkt P Kräfte aus, die unendlich klein sind im Vergleich zu denjenigen, die von den auf den Grundflächen verteilten Massen herrühren. Deswegen reduziert sich die Kraft, die in P von den auf der Fläche der Höhlung verteilten Massen herrührt, auf diejenige, die von den beiden entgegengesetzt gleichen Verteilungen auf den Grundflächen hervorgebracht wird; sie wird berechnet auf dieselbe Weise, wie vorher die Kraft R bestimmt wurde. Diese Kraft ist also nach PN gerichtet und besitzt den Wert

$$4\pi k J_n,$$

wobei mit J_n die Dichte des freien Magnetismus auf den Grundflächen, d. h. die Komponente der Magnetisierung nach PN bezeichnet wird.

Wenn wir mit $\mathfrak{H}$ bezw. $\mathfrak{H}_n$ die magnetische Kraft in P und ihre Projektion auf PN bezeichnen, so ist die Kraft, die im Punkte P der Höhlung auf die magnetische Einheitsmasse wirkt, die Resultierende aus $\mathfrak{H}$ und $4\pi k J_n$. Ihre Komponente nach PN ist

$$\mathfrak{H}_n + 4\pi k J_n;$$

dieser Ausdruck stellt auch die Projektion der Resultierenden aus $\mathfrak{H}$ und $4\pi k J$, d. h. des Vektors $\mathfrak{B}$ auf dieselbe Richtung PN dar; und dies ist es, was wir beweisen wollten.

Der Vektor $\mathfrak{B}$ ist also eine Kraft, welche in jedem Punkte eines magnetischen Feldes existiert und dort solenoidisch verteilt ist. In der Luft, oder allgemein in dem von Magneten nicht eingenommenen Raume, wo $J = 0$ ist, fällt die Kraft $\mathfrak{B}$ mit der magnetischen Kraft $\mathfrak{H}$ zusammen; in dem Raume im Innern der Magnete dagegen ist sie gleich der Kraft, welche auf die Einheit der magnetischen Masse wirken würde, wenn wir sie als in einer unendlich dünnen, im Magneten senkrecht zur Richtung der Magnetisierung hergestellten Höhlung gelegen annehmen. Die Komponente der Kraft $\mathfrak{B}$ nach einer beliebigen Richtung ist gleich der gleichgerichteten Komponenten der Kraft, welche auf die Einheitsmasse in einer im Magneten senkrecht zu der betrachteten Richtung angebrachten Höhlung wirken würde.

Man muss die beiden Kräfte $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{H}$ genau unterscheiden. Nur ausserhalb der Magnete fallen beide Kräfte zusammen, innerhalb derselben aber sind sie ganz verschieden. Die Kraft $\mathfrak{H}$ ist nicht solenoidisch verteilt; ihre Flusslinien sind niemals geschlossene Linien.

Setzen wir einmal voraus, wir hätten in solchem Falle eine geschlossene Kraftlinie, so würde es, um einen apagogischen Beweis zu

n, genügen, im Magneten einen dünnen Kanal längs derselben auszu-
n und eine z. B. nordmagnetische Masse so anzuordnen, dass sie auf
ontinuierlichen, geschlossenen Linie kreisen könnte. Dann würde
Masse in jedem Punkte der Linie von einer Kraft angegriffen
n, welche das Bestreben hätte, sie immer in demselben Sinne anzu-
n. Indem man sie zirkulieren liesse, würde die Kraft für alle Ele-
der Linie immer eine positive Arbeit leisten; man würde so aus
agnetischen Kräften eine kontinuierliche Arbeit gewinnen, ohne dass
rseits entsprechend Arbeit aufgewendet würde. Dies ist aber un-
h. Wir werden allerdings sehen, dass durch elektrische Ströme
tische Felder erzeugt werden, in welchen die Kraftlinien geschlossen
können; allein die elektrischen Ströme können immer nur durch
nd an Energie erzeugt und erhalten werden, und dann stellt die
n oben angenommenen Beispiele fortwährend zu gewinnende Arbeit
Teil der aufgewandten Arbeit dar.

ie Kraft $\mathfrak{B}$ hat dagegen solenoidische Verteilung im ganzen Raume;
lusslinien sind geschlossene Linien. Man kann hier auch nicht in
her Weise wie vorher auf die absurde Idee eines „Perpetuum mobile"
en, weil es, um die Einheit der magnetischen Masse eine solche
durchlaufen zu lassen, nicht ausreicht, im Magneten einen kleinen
längs der Linie auszuhöhlen; es wäre vielmehr nötig, im Magneten
der Reihe nach sehr dünne tellerförmige Höhlungen normal zur
tisierung herzustellen, indem man bei dem Übergang von einem
zu einem anderen immer die vorige Höhlung wieder ausfüllt.

m den wesentlichen Unterschied zwischen den beiden Kräften $\mathfrak{B}$
$\mathfrak{H}$ prägnant zu bezeichnen, schlug Lord Kelvin vor, die eine *die*
magnetische und die andere *die polare Definition der magnetischen*
zu nennen.

n vielen technischen Büchern giebt man nur die polare Definition
raft und schreibt ihr dann die Eigenschaften der elektromagnetisch
rten Kraft zu; so spricht man oft von den Kraftlinien im Innern
agnete, als wären dieselben die Fortsetzung der äusseren Kraftlinien
ldeten mit diesen ebenso viele geschlossene Linien. Aus den vorigen
ungen geht aber hervor, dass diese Darstellung nur in dem Falle
ist, dass man auf die polare Definition der magnetischen Kraft
ner auch im Innern der Magnete wirkenden Newton'schen Kraft
tet.

Wir sind auf die Betrachtung der Kraft $\mathfrak{B}$ gekommen, indem wir
er Bedingung ausgingen, dass sie solenoidische Verteilung haben
Man kann aber auch, von den Beziehungen ausgehend, die wir
en der Kraft, die in speziellen Höhlungen im Magneten auf die

Einheitsmasse wirkt, und der Kraft $\mathfrak{B}$ aufgestellt haben, direkt nachweisen, dass die Kraft $\mathfrak{B}$ solenoidische Verteilung besitzt. Es genügt dafür, zu beweisen, dass der aus einer beliebigen, geschlossenen Fläche austretende Fluss von $\mathfrak{B}$ gleich Null ist.

Die Fälle, die auftreten können, sind drei: 1) die geschlossene Fläche befindet sich ganz in nicht magnetischen Medien ausserhalb der Magnete; 2) die geschlossene Fläche liegt ganz innerhalb eines Magneten; 3) die geschlossene Fläche ist teils im Innern der Magnete, teils ausserhalb derselben.

Erster Fall. Wenn die geschlossene Fläche S keinen Magneten durchschneidet, so fällt in jedem ihrer Punkte die Kraft $\mathfrak{B}$ mit der Kraft $\mathfrak{H}$ zusammen, und es ist der Fluss von $\mathfrak{B}$ dem Flusse von $\mathfrak{H}$ gleich; letzterer ist nach dem Satze von Gauss gleich $4\pi M$, wobei M die Summe der innerhalb der Fläche vorhandenen magnetischen Massen darstellt. Nun ist M notwendigerweise Null, weil die Fläche S, wenn sie keine Magnete schneidet, entweder keinen Magneten, oder einen oder mehrere vollständige Magnete enthält, für welche die Summe der Massen von freiem Magnetismus immer Null ist; es ist also auch der aus der Fläche austretende Fluss des Vektors $\mathfrak{B}$ stets gleich Null.

Zweiter Fall. Die geschlossene Fläche S liegt ganz innerhalb eines Magneten (Fig. 76). Innerhalb und ausserhalb der Fläche S und unendlich nahe derselben stelle man sich noch zwei geschlossene Flächen vor, und denke man sich, dass die Masse des Magneten in dem von ihnen begrenzten Raume weggenommen wird, d. h. man denke sich, dass im Magneten eine unendlich dünne Höhlung längs der Fläche S hergestellt wird. Ein kleiner Teil der Begrenzung der Höhlung kann immer als einer zur Fläche tangentialen Ebene angehörend angesehen werden; folglich ist in einem beliebigen Punkte der Fläche S die Normalkomponente des Vektors $\mathfrak{B}$ gleich der Normalkomponenten der Kraft, die in dem Punkte auf die Masse *Eins* wirkt; der Fluss von $\mathfrak{B}$ ist also gleich dem Flusse dieser Kraft. Aber diese ist eine wirkliche Newton'sche Kraft; sie ist die magnetische Kraft $\mathfrak{H}$ des Systems der Magnete, das man erhält, nachdem man den Schnitt geführt hat: auf sie kann der Gauss'sche Satz angewandt werden. Der von S austretende Fluss dieser Kraft ist Null, weil die im Innern enthaltene Masse Null ist, da das losgetrennte Stück M ein vollständiger Magnet ist; es ist also auch der aus S austretende Fluss von $\mathfrak{B}$ gleich Null.

Fig. 76.

Dritter Fall. Wenn sich die Fläche S (Fig. 77) teilweise in der Luft, teilweise innerhalb der Magnete befindet, kann man in analoger Weise beweisen, dass der aus S austretende Fluss von $\mathfrak{B}$ gleich Null ist. Es genügt, sich in den Magneten unendlich dünne Schnitte längs der Fläche S vorzustellen. Auf diese Weise ist in jedem Punkte der Fläche die Normalkomponente von $\mathfrak{B}$ gleich der Normalkomponenten der Kraft, welche auf die in dem Punkte gelegene Einheitsmasse wirkt; beide Flüsse sind gleich. Der Fluss der magnetischen Kraft des neuen Systems ist nach dem Satze von Gauss gleich Null, also ist auch der Fluss von $\mathfrak{B}$ gleich Null.

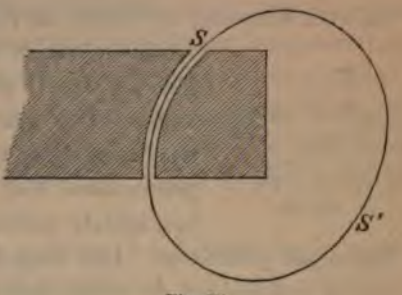


Fig. 77.

80. Magnetische Induktion. Polarisation. Verschiebung. — Der zweite Vektor mit stetiger und solenoidischer Verteilung $\mathfrak{B}$, welcher aus $\frac{\mathfrak{H}}{k}$ und $4\pi J$ resultiert, ist eine mit J physikalisch gleichartige Grösse, d. h. sie hat die Dimensionen einer Kraft dividiert durch den Faktor k. Der so definierte Vektor $\mathfrak{B}$ ist von der Kraft $\mathfrak{H}$ verschieden und heisst *magnetische Induktion;* er besitzt eine bemerkenswerte physikalische Bedeutung, für deren genaues Verständnis es notwendig ist, andere Thatsachen und Grundeigenschaften der magnetischen Felder zu erwähnen.

Bis jetzt haben wir die magnetischen Kräfte als Newton'sche, auf Massen eines bestimmten Agens in die Ferne wirkende Kräfte angesehen, und dies war natürlich, weil die bisher erwähnten Versuche uns nur die Existenz der Kräfte nachwiesen. Wenn wir nun aber an die physikalische Natur dieser Kräfte denken, werden wir zu derselben Gedankenfolge hingeleitet, zu welcher uns schon die Betrachtung der elektrischen Kräfte geführt hat, d. h. zu der Annahme, dass der Sitz der magnetischen Erscheinungen nicht nur in den Magneten, wo sich die Massen von freiem Magnetismus zeigen, sondern im ganzen Felde sei.

In der That lehrt uns die Erfahrung, dass alle Körper, die Luft und die Gase mit eingeschlossen, obwohl in viel geringerem Grade als das Eisen und die ihm verwandten Stoffe, magnetische Erscheinungen zeigen können. Es giebt nichts, was uns zu der Behauptung berechtigt, dass in einem magnetischen Felde sich nicht alle Körper magnetisieren, und es liegt nahe, anzunehmen, dass jener besondere Zustand, in welchem die Körper sich befinden, wenn wir sie als „magnetisiert" bezeichnen, für

sie alle der gleiche sei. Im Eisen ist jedes Element ein Magnet; dies ist natürlich in jedem anderen Körper vorauszusetzen.

Betrachten wir ein Element $ABCD$ (Fig. 78) eines beliebigen magnetisierten Körpers; es besitzt die Eigentümlichkeiten eines kleinen Magneten, besitzt nämlich auf den gegenüberliegenden Seiten zwei gleiche, dem Vorzeichen nach entgegengesetzte Massen n und s. Das ganze Feld, sowohl der von dem Magneten, wie auch der von nicht magnetischen Substanzen eingenommene Teil, kann in viele solche Elemente wie das betrachtete zerteilt gedacht werden. Wir sagen, dieser Raum sei *polarisiert*. Der Begriff *magnetische Polarisation* ist vollständig analog demjenigen der elektrischen Polarisation; beide Felder werden in unendlich kleine Elemente zerlegt gedacht, sodass dieselben an einer Seite positive, an der anderen negative Massen darbieten.

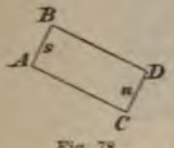


Fig. 78.

Wenn man für jedes Element die Nordmasse verschiebt, bis sie mit der Südmasse auf der gegenüberliegenden Seite des Elementes zusammenfällt, so heben sich die beiden gleichen und entgegengesetzten Massen gegenseitig auf; sie bringen keine magnetischen Kräfte mehr hervor. Wenn man nun durch diese Verschiebung die Polarisation vernichtet, d. h. jenen besonderen Zustand des Körpers aufhören lässt, der als der Zustand des „Magnetisiertseins“ bezeichnet wird, so kann man füglich umgekehrt annehmen, dass die Polarisation durch eine gleiche und entgegengesetzte Verschiebung der Elemente der magnetischen Massen hervorgebracht worden sei. Wir werden so zu der Annahme geführt, dass in jedem Punkte eines unmagnetisierten Körpers gleiche, ungleichnamige Massen von Magnetismus vorhanden seien, welche sich in ihrer Wirkung gegenseitig aufheben. Der Vorgang, durch welchen sich die Polarisation bildet, besteht in einer Verschiebung der Nordmasse gegen die Südmasse in der Richtung der Magnetisierung J; die beiden auf diese Weise frei gewordenen Massen können sich nun bemerkbar machen. Diese Wirkung erhält man jedenfalls durch die relative Verschiebung einer Masse in bezug auf die andere; man kann also für jedes Element voraussetzen, dass die Südmasse fest sei und die Nordmasse sich um eine geringe Strecke verschiebe, oder dass die Nordmasse fest sei und sich die Südmasse in der entgegengesetzten Richtung verschiebe, oder endlich, dass beide, die positive und die negative Masse, in einander entgegengesetzter Richtung fortschreiten. Die Gesamtheit dieser Massen, die wir uns in den einzelnen Elementen des Feldes dachten, bildet zwei gleiche und entgegengesetzte Verteilungen von Magnetismus. Wenn der Körper nicht magnetisiert ist, so fallen die beiden zusammen; wenn er sich polarisiert, so ergiebt sich die positive Verteilung um eine geringe Strecke gegen die negative in der Richtung von J (der Magnetisierungsrichtung) verschoben.

Man wird aber einen wesentlichen Unterschied zwischen elektrischer und magnetischer Polarisation bemerken.

In einem elektrischen Felde kann man elektrische Gleichströme haben, d. h. Verschiebungen, die immer in derselben Richtung längs geschlossener Linien stattfinden. Dagegen giebt es keine kontinuierlichen magnetischen Ströme, weil sich der Verschiebung immer elastische Gegenwirkungen entgegensetzen, welcher Art der Körper auch sei, in welchem sich die Polarisation bildet. Im wesentlichen gleicht die magnetische Polarisation der elektrischen Polarisation in den dielektrischen Körpern, aber nicht in den Konduktoren.

Durch ein zu der Richtung, nach welcher die Verschiebung stattfindet, senkrechtes, sonst beliebiges Flächenelement dS geht, während sich die Polarisation bildet, eine magnetische Menge dm hindurch. Der Vektor, dessen Tensor $\frac{dm}{dS}$ und dessen Richtung die Richtung, in welcher sich die Nordmasse verschiebt, ist, heisst *magnetische Verschiebung.*

Durch diese Betrachtungen wollen wir keine Hypothese über die physikalische Natur des Magnetismus aufstellen; wir behaupten damit nicht, dass sich in Wirklichkeit etwas verschiebt. Die Einführung des Begriffes einer durch die Verschiebung hervorgerufenen Polarisation ist vielmehr nichts anderes als eine Darstellung jenes besonderen Zustandes, welchem die magnetischen Erscheinungen ihr Dasein verdanken. Diese Darstellung eignet sich gut für eine mathematische Behandlung und stimmt mit allen Erklärungen überein, die man über die Konstitution der magnetischen Felder und die Natur des Magnetismus zu geben versucht hat. Die Maxwell'sche Theorie, die sich auf diesen Begriff aufbaut, bietet keine grössere Willkür als die Newton'sche Theorie der in die Ferne wirkenden Massen, hat aber vor letzterer den Vorzug, dass sie die Thatsache berücksichtigt, dass alle Körper magnetische Erscheinungen aufweisen.

Man hat gesehen, dass die in einer beliebigen geschlossenen Fläche enthaltene Masse von Magnetismus, gleichgiltig ob sie Magnete oder unmagnetische Körper durchsetzt, stets gleich Null ist; man kann weder Magnetismus hineinbringen, noch solchen daraus entnehmen, es ist also der Fluss der Verschiebung durch eine beliebige geschlossene Fläche gleich Null, oder:

Die magnetische Verschiebung besitzt solenoidische Verteilung.

In jedem Punkte des Raumes besteht zwischen magnetischer Kraft und magnetischer Verschiebung die Beziehung der Ursache zur Wirkung, wie zwischen elastischer Kraft und Deformation.

hieraus erklärt sich die Wahl des Namens: *magnetischer Kreis.* Der magnetische Kreis wird *geschlossen* oder *offen* genannt, je nachdem er nur aus magnetischem Material oder auch aus Schichten von Luft oder wenig magnetischem Material besteht.

In einem magnetischen Kreise findet die Verschiebung gegen Reaktionen statt, welche sich ihr entgegensetzen und sie aufheben, sobald die sie hervorbringende Ursache aufhört; um sie hervorzurufen und beizubehalten, sind also äussere Kräfte notwendig, welche derselben Natur wie die magnetischen Kräfte sind und *magnetomotorische Kräfte* genannt werden können; genau so wie zu einer elektrischen Verschiebung im Dielektrikum elektromotorische Kräfte nötig sind.

82. Induktionslinien und Kraftlinien. — Wir haben gesehen, dass die magnetische Kraft $\mathfrak{H}$ durch die Oberfläche der Magnete diskontinuierlich variiert, während die Induktion $\mathfrak{B}$ stetige und solenoidische Verteilung im ganzen Felde besitzt.

Ein Beispiel soll diese Thatsache erläutern.

Wir betrachten (Fig. 81) einen gleichförmig in der Richtung J magnetisierten Zylinder $ABCD$. Man weiss, dass die Massen von freiem Magnetismus sich auf zwei gleichförmige Verteilungen mit der Dichte $\sigma = J$, eine nordmagnetische auf der Seite CD und eine südmagnetische auf der Seite AB, reduzieren.

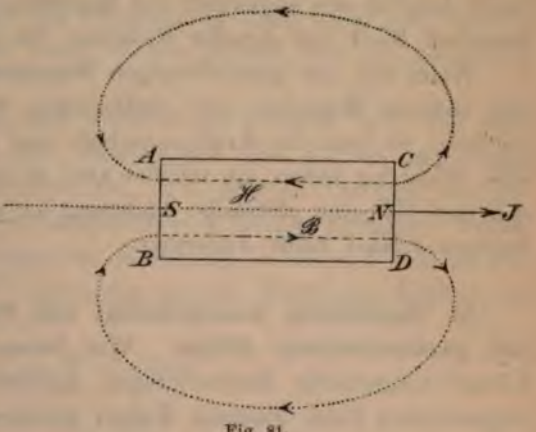


Fig. 81.

Betrachten wir die Kraftlinien. Die sehr nahe der Nordseite CD in einem beliebigen Punkte ausserhalb des Magneten gelegene, positive Einheit der magnetischen Masse wird abgestossen; wird sie dagegen sehr nahe an die Südseite AB gebracht, dann wird sie angezogen; also gehen die Kraftlinien von CD aus, biegen sich und endigen auf der Seite AB.

In Punkten ausserhalb des Magneten unendlich nahe an den Grundflächen, aber nicht an deren Begrenzung, ist die auf die Flächeneinheit kommende Anzahl der Kraftlinien, d. h. der Wert der Kraft: $2\pi J$. Um die sich im Innern des Magneten befindenden Kraftlinien zu ziehen, muss man sich denken, dass die beiden Verteilungen von Magne-

tismus auch dann vorhanden seien, wenn der Raum $ABCD$ mit Luft und nicht mit magnetischem Material ausgefüllt ist. Eine zwischen AB und CD gelegene Nordmasse wird von dem Nordmagnetismus von CD abgestossen und von dem Südmagnetismus von AB angezogen; folglich verlaufen die Kraftlinien auch im Innern des Magneten von CD nach AB. Die Kraft hat im Innern des Magneten in unendlich nahe an den Grundflächen, aber nicht an deren Begrenzung gelegenen Punkten denselben Wert wie ausserhalb des Magneten in solchen Punkten, sie besitzt aber entgegengesetzte Richtung. Wenn wir die mit der Richtung der Magnetisierung gleichgerichteten Kräfte als positiv ansehen, können wir sagen, dass die Kraft beim Durchgang durch die Oberfläche des Magneten von $2\pi J$ zu $-2\pi J$, d. h. um $4\pi J$ variiert.

Die Induktionslinien sind dagegen geschlossene Linien, welche beim Durchgang durch die beiden Grundflächen keine Unstetigkeit aufweisen. Die Induktion, die aussen gleich der Kraft ist, wird, wenn wir z. B. die Seite AB betrachten, wo die auf die Flächeneinheit kommende Zahl der Kraftlinien plötzlich um $4\pi J$ vermindert wird, innen sprungweise um den Wert $4\pi J$ vergrössert, und folglich wird die Zahl der Induktionslinien gleich der Zahl der Kraftlinien, vermehrt um den Wert $4\pi J$, d. h. sie bleibt dieselbe wie ausserhalb des Magneten: die Induktion hat also innen denselben Wert und dieselbe Richtung wie aussen.

Wenn wir den gleichförmigen Magneten, anstatt isoliert, in einem von anderen Magneten oder elektrischen Strömen erzeugten Felde betrachten, so kann die Kraft innerhalb und ausserhalb des Magneten dieselbe Richtung haben, sie erleidet aber in jedem Falle durch die Flächen AB und CD eine plötzliche Änderung um den Wert $4\pi J$; die Induktion dagegen erfährt keine Änderung.

83. Magnetische Suszeptibilität und Permeabilität. Diamagnetische und paramagnetische Körper. Wir haben bereits erwähnt, dass alle Körper magnetische Erscheinungen darbieten können. Jeder in einem magnetischen Felde gelegene Körper polarisiert sich also mehr oder weniger stark; in jedem seiner Punkte existieren die Vektoren $\mathfrak{H}$, J und $\mathfrak{B}$, welche wir bei unseren Betrachtungen eingeführt haben. Es ist jetzt angezeigt, zu untersuchen, ob unter diesen Vektoren derartige Beziehungen bestehen, dass man, wenn der Wert eines derselben gegeben ist, den Wert der anderen für jeden Körper ermitteln kann.

Wie wir schon gesehen haben, bestehen für die magnetischen Erscheinungen in der Luft die Beziehungen $J = 0$ und $\mathfrak{H} = \mathfrak{B}$. Wir werden sehen, dass $\mathfrak{B}$ und J in den magnetischen Körpern keine einfachen Funktionen von $\mathfrak{H}$ sind; einem und demselben Wert von $\mathfrak{H}$

können unendlich viele Werte von $\mathfrak{B}$ und J entsprechen, je nach der Reihe der Werte, welche $\mathfrak{H}$ bereits angenommen hat. Mit diesen Körpern, bei welchen die Erscheinungen verwickeltere sind, werden wir uns später beschäftigen. Für die wenig magnetischen Körper kann man annehmen, dass $\mathfrak{B}$ und J proportional mit $\mathfrak{H}$ variieren. Dasselbe kann man von den magnetischen Körpern sagen, wenn man sehr kleine Variationen von $\mathfrak{H}$ betrachtet.

In solchen Fällen wird man die Beziehungen niederschreiben können:

$$\mathfrak{B} = \mu \mathfrak{H}, \qquad \mu = \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{H}} \tag{21}$$

$$J = \varkappa \mathfrak{H}, \qquad \varkappa = \frac{J}{\mathfrak{H}}. \tag{22}$$

Lord Kelvin nannte die Grösse μ *magnetische Permeabilität*, und die Grösse $\varkappa$ *magnetische Suszeptibilität*. Für die wenig magnetischen Körper sind μ und $\varkappa$ zwei spezifische Konstante; für das Eisen und die ihm verwandten Körper dagegen kann man ebenfalls die Gleichungen (21) und (22) anwenden, wenn man kleine Variationen von $\mathfrak{H}$ ins Auge fasst und μ und $\varkappa$ als Veränderliche, als Funktionen von $\mathfrak{H}$ behandelt; wenn die Variationen von $\mathfrak{H}$ aber gross sind, dann drücken die betreffenden Formeln die Gesetze der Erscheinung nicht mehr aus, weil μ und $\varkappa$ in diesem Falle nicht mehr als Funktionen von $\mathfrak{H}$ angesehen werden dürfen.

Betrachten wir den Fall, auf welchen die Formeln (21) und (22) anwendbar sind, und setzen wir voraus, dass der Körper nur durch Wirkung der Kraft $\mathfrak{H}$ magnetisiert sei, d. h. dass in das Feld ein isotroper, homogener, nicht vorher magnetisierter Körper eingeführt werde. Es besteht dann eine bemerkenswerte Beziehung zwischen μ und $\varkappa$; alle drei Vektoren $\mathfrak{B}$, J und $\mathfrak{H}$ haben die gleiche Richtung; folglich ergiebt sich

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{H} + 4\pi J, \tag{23}$$

woraus wiederum folgt:

$$\mu = 1 + 4\pi\varkappa. \tag{24}$$

In diesem Falle sind μ und $\varkappa$ von einander nicht unabhängig; um die magnetischen Eigenschaften der verschiedenen Körper ermitteln zu können, wird es genügen, eine von den beiden Grössen zu kennen: je nach den verschiedenen Fällen wird es bequem sein, die eine oder die andere zu betrachten.

Die magnetische Permeabilität μ hat einen positiven Wert für alle Körper; einen sehr grossen für die magnetischen Materialien, einen von der Einheit wenig verschiedenen Wert für die wenig magnetischen Körper,

und zwar ist dieser Wert etwas grösser als die Einheit für einige, etwas kleiner für einige andere Körper.

Bei den Körpern, für welche $\mu > 1$ ist, ist $\varkappa > 0$ und J hat die gleiche Richtung wie $\mathfrak{H}$. Bei den Körpern dagegen, für welche $\mu < 1$ ist, ist $\varkappa < 0$ und J besitzt eine der Richtung von $\mathfrak{H}$ entgegengesetzte Richtung. Die ersten Körper heissen *magnetisch* oder *paramagnetisch*; die anderen heissen *diamagnetisch*.

Werden paramagnetische und diamagnetische Körper der Wirkung magnetischer Kräfte unterworfen, so verhalten sie sich in verschiedener Weise.

Ein magnetischer Körper AB (Fig. 82) nimmt, wenn er in schiefer Lage in ein Feld von der Stärke $\mathfrak{H}$ gebracht wird, eine Magnetisierung J in der Richtung von $\mathfrak{H}$ an; er weist nämlich einen Südpol in B, einen Nordpol in A auf und unterliegt deswegen, sofern er nicht schon in

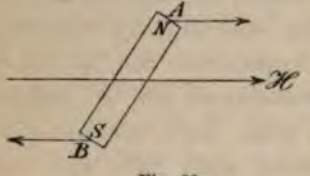


Fig. 82.

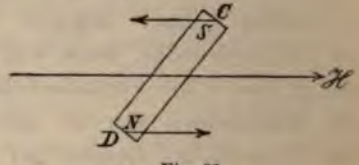


Fig. 83.

dieser Richtung selbst liegt, einem Drehmoment, das ihn mit der Achse SN in die Richtung von $\mathfrak{H}$ zu bringen sucht. Wenn man dagegen in das Feld (Fig. 83) einen diamagnetischen Körper bringt, so bildet sich, weil J und $\mathfrak{H}$ entgegengesetzt gerichtet sind, ein Nordpol in D, ein Südpol in C und folglich ein Kräftepaar, welches den Körper mit der Achse CD in die zu $\mathfrak{H}$ normale Richtung zu lagern sucht; ein diamagnetischer Körper ist in der Lage stabilen Gleichgewichtes, wenn er normal zum Felde liegt. Der Körper, der die stärksten diamagnetischen Eigenschaften besitzt, ist das Wismut.

Die Eigenschaften der diamagnetischen und paramagnetischen Körper können erklärt werden, wenn man auch die Polarisation des Mediums, in welchem sie sich befinden, betrachtet. In dem Medium hat man $\mu = 1$, folglich $\mathfrak{B} = \mathfrak{H}$; in dem Körper dagegen hat man für einen und denselben Wert der Induktion und folglich der Verschiebung verschiedene Werte für $\mathfrak{H}$, je nachdem $\mu > 1$ oder $\mu < 1$. Im ersten Falle ist die Kraft $\mathfrak{H}$ grösser in dem Medium, als in dem Körper; das Gegenteil gilt für den zweiten Fall. Was wir experimentell wahrnehmen, ist die Differenz zwischen der Kraft im Körper und der im Medium, welche in beiden Fällen entgegengesetztes Vorzeichen hat und [illegible] gegengesetzte magnetische Massen und Stärken der Magn

ringt; ebenso, wie im Felde der Schwere ein in eine Flüssigkeit ichter Körper einen Antrieb nach unten oder nach oben erfahren , je nachdem er dichter oder weniger dicht als die Flüssigkeit ist.

Die magnetische Permeabilität kann auch anders definiert werden. ei SS (Fig. 84) die Trennungsfläche zwischen der Luft und einem ber mit der Permeabilität μ; P und P' seien zwei einander unendlich gelegene Punkte, der eine in der Luft, der andere in dem Körper. Zwischen den Normalkomponenten $\mathfrak{H}_n'$, $\mathfrak{H}_n$ der magnetischen Kraft P' und P und der Normalkomponenten J_n der netisierung besteht die Beziehung (17′)

$$\mathfrak{H}_n' = \mathfrak{H}_n + 4\pi J_n$$

$$\mathfrak{H}_n' = \mathfrak{H}_n(1 + 4\pi\varkappa) = \mu\mathfrak{H}_n,$$

aus sich ergiebt:

$$\mu = \frac{\mathfrak{H}_n'}{\mathfrak{H}_n}.$$

Fig. 84.

Man kann also die magnetische Permeabilität s Körpers als das Verhältnis zwischen den Werten der magnetischen ft in zwei Punkten definieren, von welchen sich einer ausserhalb, der ere innerhalb des Körpers sehr nahe der Oberfläche befindet. Wenn 1 ist, hat die Kraft einen kleineren Wert im Innern des Körpers als erhalb derselben, und der Unterschied kann für die Körper, für welche oss ist, sehr bedeutend werden.

Wir haben dies erwähnt, um auf eine Verwechselung aufmerksam machen, die in manchen technischen Büchern bei der Definition der netischen Permeabilität gemacht wird. Man sagt: „Wenn in ein netisches Feld von der Stärke $\mathfrak{H}$ ein Stab von der zu untersuchenden stanz gebracht wird, nimmt die Kraftlinienzahl, die vorher den Wert hatte, den Wert $\mathfrak{B}$ an; das Verhältnis $\frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{H}}$ heisst dann Permeabilität.“ h dieser Definition scheint es, als ob für $\mu > 1$ die Kraftlinienzahl grösser rhalb als ausserhalb des Körpers wäre, während gerade das Gegenteil der ist. Man könnte diese Definition gelten lassen, wenn man die elektro- netische Definition der Kraft ins Auge fasste, aber dann dürfte man e Kraft im Innern der Magnete nicht als Newton'sche Kraft behandeln.

Die magnetische Permeabilität hat eine bemerkenswerte physikalische eutung. Aus den Beziehungen (20) und (21) ermittelt man

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{4\pi}\frac{\mathfrak{H}}{b}, \qquad \mu = \frac{4\pi b}{\mathfrak{H}}.$$

Die Permeabilität ist der Verschiebung, die man durch eine gegebene ft hervorbringen kann, proportional. Wenn wir die magnetischen mit

den elektrischen Erscheinungen vergleichen, werden wir μ *Koeffizient der magnetischen Durchlässigkeit* nennen, ebenso wie wir die Dielektrizitätskonstante ε Koeffizient der elektrischen Durchlässigkeit genannt haben. Der reziproke Wert der Permeabilität dagegen, $\frac{1}{\mu}$, giebt das Mass der Kraft, die notwendig ist, um eine gewisse Verschiebung hervorzubringen; wir könnten $\frac{1}{\mu}$ *Koeffizient der magnetischen Elastizität* nennen.

Die Permeabilität μ gestattet noch eine andere physikalische Deutung, welche passender angewendet werden kann, wenn es sich um stark magnetische Körper handelt. Stellen wir uns den ganzen Raum mit einem unverdichtbaren Fluidum erfüllt vor, welches sich verschieben kann, indem es Kräfte überwindet, die umgekehrt proportional der Grösse μ sind, oder welches unter der Wirkung gegebener Kräfte der Grösse μ proportionale Verschiebungen erleidet. Wenn wir uns jeden Punkt als Angriffspunkt einer Kraft denken, welche gleich der magnetischen Kraft $\mathfrak{H}$ ist, so erfährt das Fluidum eine Verschiebung gleich b, welche je nach der Permeabilität von Punkt zu Punkt verschieden ist. Wir sehen so ein, dass μ uns den Koeffizienten der magnetischen Durchlässigkeit des Mediums für das Fluidum darstellt; es ist eben dieser Vergleich, der Lord Kelvin veranlasste, für μ den Namen Permeabilität zu wählen.

Der Begriff Verschiebung ist nichts anderes als eine Fiktion, eine Vorstellung unseres Geistes, ein Mittel, die Thatsachen zu versinnbildlichen, ebenso gerechtfertigt, als der der Wirkung in die Ferne; aber, da er auf einer mathematischen Definition beruht, sind alle Ableitungen, die wir unter Benutzung dieses Begriffs machen, streng richtig, mindestens so lange wir uns von den Aufgaben in bezug auf die Verteilung der Vektoren $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{B}$ nicht entfernen.

Indem wir den Begriff der Verschiebung und die physikalische Deutung der magnetischen Permeabilität benützen, können wir den Verlauf der Induktionslinien für gegebene Verteilungen der Kraft und der Permeabilität voraussehen.

Betrachten wir einige Beispiele.

Es sei in der Luft oder in einem anderen nicht magnetischen Medium ein gleichförmiges magnetisches Feld vorhanden; die Kraftlinien sind parallele, gleichmässig verteilte Gerade; die Niveauflächen sind parallele, gleich weit von einander entfernte und zu den Kraftlinien senkrechte Ebenen. Bringt man in dieses Feld (Fig. 85) einen Körper M von grosser Permeabilität, z. B. ein Eisenstück, so wird dadurch die Verteilung der Kraftlinien und Induktionslinien verändert.

ar hat man, während vorher die Permeabilität und folglich bung in jedem Punkte die gleiche war, nunmehr innerhalb ns M die Permeabilität folglich müssen die Werte bung und der Induktion nseits zweier passend ent- auebenen AB und CD das Feld als unverändert aber zwischen AB und ie Induktionslinien keine hr, sondern sie konver- n die Richtung des mag- eldes als von A nach C nach D gehend ange- d, von AB aus gegen die b von M und treten aus cd nach der Ebene CD aus. Die Feldstärke wird also in der Nähe der Seite ab grösser, dagegen viel kleiner in den Regionen P und Q sein.

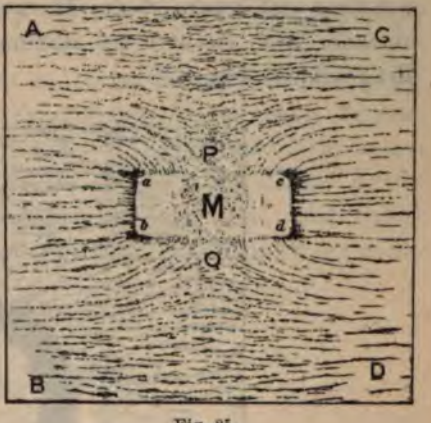


Fig. 85.

so, als ob asserstrom in mässig durch- um hätten und des letzteren durchlässige- ersetzten; das vorher den gleichmässig geht jetzt in grösserer urch.

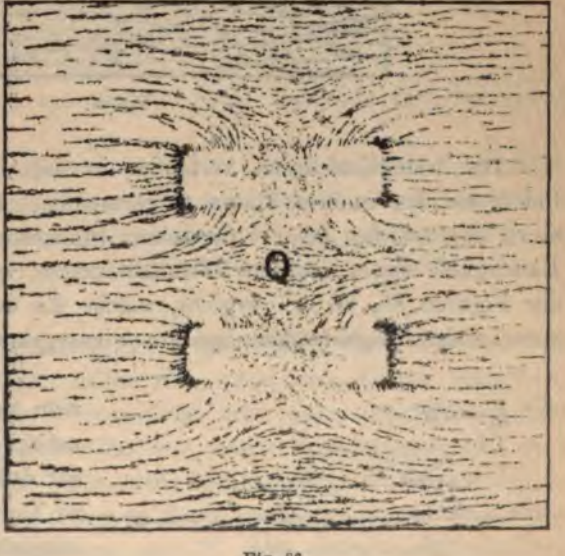


Fig. 86.

man in dem Felde, anstatt n Eisenstabes, r und zu der Feldes paral- anordnet, so durch analoge n, dass die Induktionslinien den in Fig. 86 angedeuteten Ver- Es ergiebt sich, dass im Raume Q zwischen beiden Stäben e am kleinsten ist.

Wenn unser Zweck der ist, im Raume Q die Feldstärke so klein wie möglich zu machen, werden wir ihn besser dadurch erreichen, dass wir an Stelle der beiden geraden Stäbe nach innen gebogene Stäbe verwenden; und zwar ist die Wirkung um so grösser, je näher die Stäbe einander sind, sie wird ein Maximum, wenn die Stäbe einen geschlossenen Ring bilden (Fig. 87).

Fig. 87.

Die Induktionslinien verlaufen in den beiden Hälften des Ringes, indem sie den inneren Raum Q vermeiden. Ein Eisenring bildet somit einen *magnetischen Schirm* für seinen Innenraum. Die Erfahrung lehrt die Richtigkeit dieser unseren Voraussetzungen, wie es sich aus der Prüfung der Figuren 85, 86, 87 ergiebt, welche die den betrachteten Fällen entsprechenden magnetischen Spektra wiedergeben.

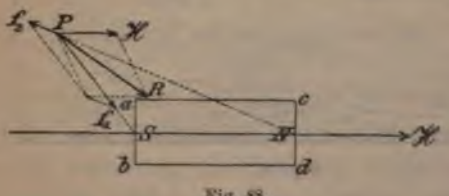


Fig. 88.

Zu denselben Schlüssen kann man gelangen, wenn man die magnetischen Massen betrachtet, welche auf dem Eisenstücke nur deswegen zu Tage treten, weil man es in ein magnetisches Feld gebracht hat. So hat man in dem vorher betrachteten Falle (Fig. 88) eine Verteilung von Südmagnetismus in ab, von Nordmagnetismus in cd. Die Kraft ist in jedem Punkte die Resultierende aus der Kraft $\mathfrak{H}$ und der von den frei

gewordenen magnetischen Massen herrührenden Kraft. Auf die in einem Punkte P gelegene Einheit der magnetischen Masse wirken die Kräfte $\mathscr{H}$, f_1, f_2, welche bezw. vom Felde, von der Südverteilung auf ab und von der Nordverteilung auf cd herrühren und eine nach ab hin gerichtete Resultierende R ergeben.

Wenn wir in analoger Weise den in einem homogenen Felde gelegenen Ring betrachten, so bilden sich (Fig. 89) zwei Verteilungen, die eine negative in SS, die andere positive in NN. Diese beiden Verteilungen bringen in einem Punkte O in dem Raume innerhalb des Ringes Kräfte hervor, die zu der Kraft $\mathscr{H}$ entgegengesetzt gerichtet sind. Die Resultierende R dieser drei Kräfte ist sehr klein oder verschwindet gänzlich.

Fig. 89.

Diese Eigenschaft der Ringe aus magnetischem Materiale wird bei vielen Messapparaten verwendet.

Wir haben uns auf einfache qualitative Betrachtungen beschränkt, aber wir könnten auch, indem wir von dem Begriff der Permeabilität oder von dem der induzierten magnetischen Massen ausgehen, für die verschiedenen Fälle genauere quantitative Berechnungen anstellen.

84. Magnetische Eigenschaften der magnetischen Materialien. — Die vorher ermittelten Beziehungen gelten nur, wenn man Körper betrachtet, in welchen die magnetische Permeabilität sehr nahe dem Werte *Eins* ist; sie gelten nicht mehr, ausser für sehr kleine Änderungen, bei stark magnetischen Körpern. Für diese sind die Induktion und die Magnetisierung nicht mehr der magnetischen Kraft proportional; sie sind sogar nicht einmal bestimmte Funktionen von $\mathscr{H}$, weil einem und demselben Wert von $\mathscr{H}$ unendlich viele Werte für $\mathscr{B}$ oder J entsprecken können, je nach den Werten, welche die magnetische Kraft vorher angenommen hat.

Wir beabsichtigen nun im Folgenden, die magnetischen Eigenschaften des Eisens und der ihm verwandten Körper zu studieren, d. h. das Gesetz,

nach welchem in diesen Körpern die Grösse $\mathfrak{B}$ und folglich auch J mit dem Variieren von $\mathfrak{H}$ sich ändert, zu erforschen.

Wir werden sehen, wie man durch einen elektrischen Strom in einem gegebenen Raume eine magnetische Kraft erzeugen kann, welche sich leicht berechnen lässt, wenn die Stärke des elektrischen Stromes bekannt ist; wir werden ferner sehen, wie man durch die elektrischen Wirkungen, welche von den Änderungen des Induktionsflusses in einem gegebenen magnetischen Kreise erzeugt werden, den Mittelwert der magnetischen Induktion in einem gegebenen Schnitte des magnetischen Kreises berechnen kann; wir werden also die nötigen Unterlagen haben, um die magnetischen Eigenschaften eines beliebigen Körpers zu studieren, da wir in ihm bestimmte magnetische Kräfte $\mathfrak{H}$ erzeugen und für jeden Wert von $\mathfrak{H}$ den entsprechenden Wert der Induktion $\mathfrak{B}$ bestimmen können.

Es interessiert uns jedoch nicht, hier die verschiedenen Methoden zu beschreiben, nach welchen solche Versuche angestellt werden können; es genügt uns, deren Möglichkeit angedeutet zu haben, und wir erwähnen ohne weiteres die Ergebnisse, zu welchen Prof. Ewing und Dr. Hopkinson bei ihren klassischen Versuchen gelangten, sowie die Schlussfolgerungen, die sie daraus ableiteten.

Weiches Eisen. Experimentieren wir zuerst mit einem Stab von weichem, möglichst reinem Schmiedeeisen. Die Beziehung, welche zwischen $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{H}$ besteht, kann in diesem Falle, wie schon erwähnt, nicht durch eine algebraische Funktion ausgedrückt werden; es wird sich empfehlen, dieselbe geometrisch durch eine auf zwei orthogonale Achsen bezogene Kurve darzustellen, indem wir auf der Abscissenachse die Werte von $\mathfrak{H}$ und auf der Ordinatenachse die entsprechenden Werte von $\mathfrak{B}$ auftragen. Für die graphische Darstellung pflegt man, um derselben grössere Deutlichkeit zu verleihen, die Werte von $\mathfrak{H}$ auf eine tausendmal grössere Einheit als die Werte von $\mathfrak{B}$ zu beziehen. Setzen wir voraus, dass der Stab vor dem Beginn des Versuches von jeder Spur vorherbestehender magnetischer Polarisation befreit worden sei, d. h. dass man den Körper auf den natürlichen Zustand gebracht habe, wo also $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{B}$ beide gleich Null sind. In unserer graphischen Darstellung ist somit (Fig. 90) der Ursprung O der Koordinatenachsen ein Punkt der Kurve.

Wenn wir der Grösse $\mathfrak{H}$ von Null aus langsam wachsende Werte beilegen, so steigt die Induktion $\mathfrak{B}$ zuerst auch langsam, dann schneller, während sie sich für eine gewisse Strecke der Kraft $\mathfrak{H}$ fast proportional hält; später wächst sie viel weniger rasch und ist endlich wiederum bestrebt, sich proportional mit $\mathfrak{H}$ zu ändern. Die uns diese Variationen dar-

tellende Kurve geht also von O die Abscissenachse $\mathscr{H}$ tangierend aus, ann biegt sie sich und wendet ihre konvexe Seite gegen die Abscissenchse. Über den Punkt N von grösster Krümmung hinaus nähert sich ie Kurve merklich einer Geraden, dann biegt sie sich wieder, indem sie lie konkave Seite gegen die Abscissenachse wendet. Der Punkt M ist

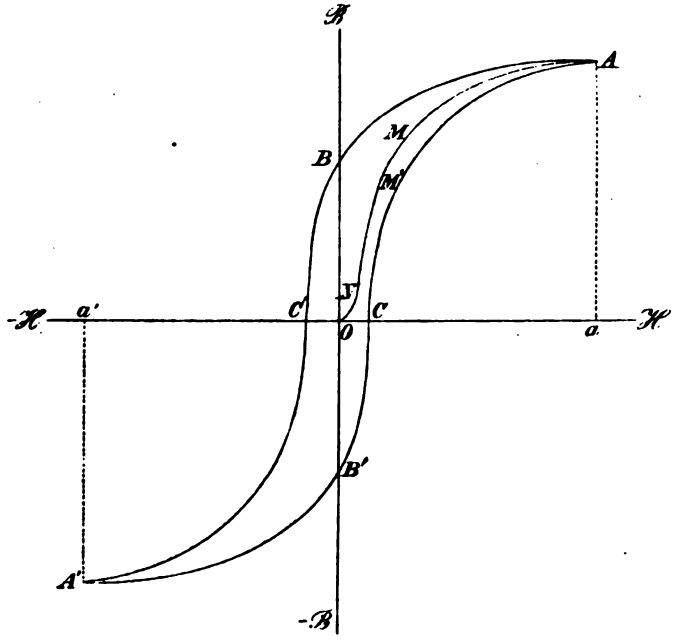


Fig. 90.

wiederum ein Punkt grösster Krümmung, welcher „*das Knie*" genannt wird; jenseits desselben wird die Krümmung schwächer, und die Linie zeigt wieder einen merklich geradlinigen Verlauf, indem sie nach einer Asymptote strebt, welche unter einem Winkel von 45° ansteigen würde, wenn man für $\mathscr{B}$ und $\mathscr{H}$ gleichen Massstab wählte, da $\mathscr{H}$ und $\mathscr{B}$ für sehr grosse Werte einander gleich sind.

Wenn wir die magnetische Permeabilität berechnen, welche hier keine Konstante mehr, sondern ein veränderliches Verhältnis zwischen $\mathscr{B}$ und $\mathscr{H}$ ist, finden wir, dass die Permeabilität mit dem Werte $\mu = 1$ im Ursprung beginnt, mehr oder weniger langsam bis zu einem dem Knie nahen Punkte M' steigt, in welchem die Kurve von der durch den Koordinaten-Mittelpunkt gezogenen Tangente berührt wird, dann, die Tangente nicht durchsetzend, langsamer ansteigt und für sehr grosse Werte von $\mathscr{B}$ und $\mathscr{H}$ wieder dem Werte $\mu = 1$ zustrebt. Dementsprechend geht die magnetische Suszeptibilität vom Werte Null im

Ursprung aus, wächst bis zum Punkte M', um wieder zu sinken und nach Null zu konvergieren.

Dieses ist der Verlauf des Vorgangs, welcher im wesentlichen für alle Sorten von weichem Eisen gleich ist. Wenn man jedoch die numerischen Werte betrachtet, so findet man dieselben sehr verschieden je nach der Qualität und Reinheit des Eisens. Für sehr weiches, ausgeglühtes, reines Eisen kann man folgende Zahlen als Mittelwerte annehmen:

Der erste Punkt N maximaler Krümmung entspricht einem Abscissenwerte von $\mathfrak{H} = 1$; das Knie M einem Werte $\mathfrak{H} = 5$, welchem ein Ordinatenwert $\mathfrak{B} = 10\,000$ entspricht; für $\mathfrak{H} = 11$ hat man $\mathfrak{B} = 12\,500$, für $\mathfrak{H} = 17$ ist $\mathfrak{B} = 13\,500$; der grösste Wert von μ kann zwischen 2000 und 3000 variieren, und diesem entspricht für $\varkappa$ ein Wert zwischen 150 und 250.

Bis jetzt haben wir die Kraft $\mathfrak{H}$ nur, während sie allmählich anwuchs, betrachtet. Wenn ein Wert Oa von $\mathfrak{H}$, welchem ein Wert aA von $\mathfrak{B}$ zukommt, erreicht ist, lassen wir $\mathfrak{H}$ nach und nach wieder abnehmen; $\mathfrak{B}$ sinkt dann auch, aber wir bemerken sogleich eine wichtige Thatsache: es nimmt nämlich die Grösse $\mathfrak{B}$ nunmehr andere Werte an, als sie beim Anwachsen der Grösse $\mathfrak{H}$ besass, und zwar behält sie an allen Stellen grössere Werte, als sie vorher beim Anwachsen von $\mathfrak{H}$ an diesen Stellen hatte. Daher fällt der neue Ast der Kurve mit dem ersten Ast OMA nicht zusammen, sondern verläuft oberhalb desselben, geht von A mit einer zur Abscissenachse merklich parallelen Tangente aus und fällt langsam ab derart, dass $\mathfrak{B}$, wenn $\mathfrak{H}$ wieder zu Null geworden ist, noch einen sehr grossen Wert OB behält, welcher gewöhnlich für weiches Eisen ungefähr $^2/_3$ des maximalen Wertes aA beträgt.

Wenn man nun der Grösse $\mathfrak{H}$ wachsende negative Werte zuschreibt, sinken die Werte von $\mathfrak{B}$ erst sehr schnell, bis $\mathfrak{B}$ für einen Wert OC' von $\mathfrak{H}$ gleich Null wird; man hat folglich eine rasch fallende Kurve, die im letzten Stücke fast geradlinig verläuft und die negative Seite der Abscissenachse in einem Punkte C' schneidet. Für das weiche Eisen ist der Wert von OB, wenn der maximale Wert aA von $\mathfrak{B}$ 12 000 bis 15 000 war, 8000 bis 9000, und der Wert von OC' ungefähr 2.

Wenn man fortfährt, $\mathfrak{H}$ negativ anwachsen zu lassen, wird $\mathfrak{B}$ auch negativ und steigt zuerst schnell, dann nach und nach langsamer; die Kurve verläuft bei C' eine gewisse Strecke merklich geradlinig, dann biegt sie sich, indem sie die konkave Seite der negativen Abscissenachse zuwendet, und strebt asymptotisch nach einer Geraden, welche unter 45° gegen die Achsen geneigt wäre, wenn die Massstäbe für $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{B}$ in

der Zeichnung gleich gewählt worden wären. Wenn die Grösse $\mathfrak{H}$ einen Wert $Oa' = -Oa$ erreicht hat, nimmt $\mathfrak{B}$ den Wert $a'A' = -aA$ an, d. h. der zu A in bezug auf den Koordinaten-Mittelpunkt symmetrisch gelegene Punkt A' gehört der Kurve an. Wenn wir, nach A' gelangt, $\mathfrak{H}$ die gleichen, aber entgegengesetzten Änderungen erfahren lassen, indem wir nämlich $\mathfrak{H}$ allmählich vom Werte Oa' zu Null und dann zum Werte Oa variieren lassen, erhalten wir einen zweiten Ast der Kurve, welcher sehr angenähert dem schon gezogenen Aste in bezug auf den Koordinaten-Mittelpunkt symmetrisch ist, d. h. wir erhalten eine Kurve, die von A' mit einer zur Abscissenachse nahezu parallelen Tangente ausgeht, eine lange Strecke langsam steigt, bis sie die Ordinatenachse in einem Punkte B' schneidet, für welchen die Beziehung $OB' = -OB$

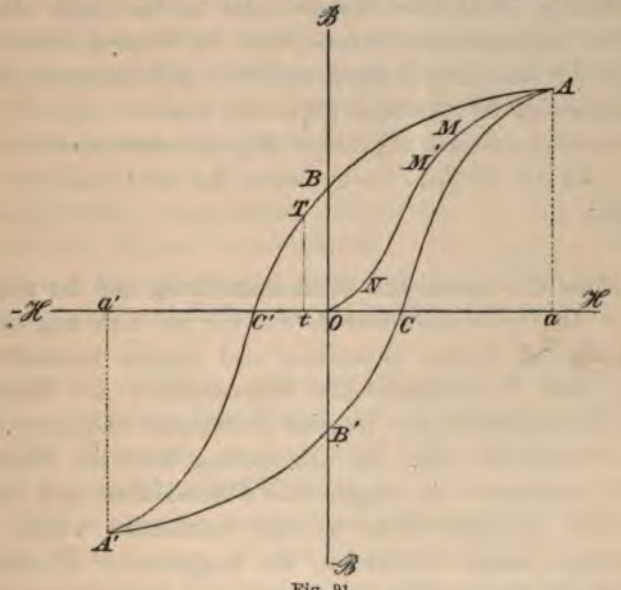


Fig. 91.

gilt, dann schnell ansteigt, für $\mathfrak{H} = OC = -OC'$ die Abscissenachse schneidet, und schliesslich, ähnlich wie die Kurve $C'A'$ verlaufend, mit grosser Annäherung im Punkte A endigt.

Stahl. Wenn man dieselben Untersuchungen für den Stahl anstellt, erhält man eine Kurve, die im ganzen denselben Verlauf hat, aber in der Richtung der Abscissenachse gestreckter erscheint, weil die Ordinatenwerte $\mathfrak{B}$ mit dem Wachsen von $\mathfrak{H}$ viel weniger rasch anwachsen.

So hat für gehärteten Stahl, wie er für Klaviersaiten verwendet wird, der erste Ast OMA der Kurve (Fig. 91) das Knie M bei einem Wert von $\mathfrak{B}$ gleich 7000 bis 8000, welcher einem Werte $\mathfrak{H}$, von un-

vermindert worden waren gegen die Werte, welche sie ursprünglich an den betreffenden Stellen besessen hatten.

Eine weitere bemerkenswerte Eigenschaft ist die, dass durch Vibrationen, denen eiserne Gegenstände ausgesetzt werden, eine Annäherung der beiden Äste der Kurve $AC'A'$ und $A'CA$ herbeigeführt wird. Diese Thatsache ist sehr wichtig, weil fast alle Maschinen und technischen Apparate, da sie bewegliche Teile besitzen, notwendigerweise Erschütterungen und Schwingungen unterworfen sind.

Die Temperatur hat bis zu ziemlich hohen Grenzen keinen merklichen Einfluss auf die magnetischen Eigenschaften des Eisens, aber über gewisse Grenzen hinaus wird der Einfluss der Temperatur sehr gross. Bringt man einen Stab aus weichem Eisen in ein magnetisches Feld mit der Stärke $\mathfrak{H}$, und lässt man die Temperatur des Stabes variieren, während man für jeden Wert der Temperatur den entsprechenden Wert der Magnetisierung im Eisen bestimmt, so findet man, dass dieser Wert bis zu einer Temperatur von etwa 680° konstant bleibt, dann rasch sinkt und für eine Temperatur von ungefähr 750° zu Null wird.

86. Magnetischer Kreisprozess. Hysteresis. — Die schematischen, oben beschriebenen Kurven veranschaulichen das magnetische Verhalten der verschiedenen Materialien; es wird gut sein, über dieselben noch einige Betrachtungen anzustellen, aus denen wichtige Schlüsse gezogen werden können.

Es ergiebt sich vor allem, dass die magnetische Permeabilität für das Eisen und die ihm verwandten Körper, wie wir mehrmals erwähnt haben, nicht nur keine Konstante, sondern auch nicht einmal eine bestimmte Funktion der magnetischen Kraft $\mathfrak{H}$ ist.

In der That entsprechen in der beschriebenen Kurve (Fig. 92) einem und demselben Wert Op von $\mathfrak{H}$ drei Werte für $\mathfrak{B}$, d. h. pP, pP', pP''. Wenn wir nun in unserem Versuche, $\mathfrak{H}$ zwischen entgegengesetzt gleichen, von den vorher betrachteten verschiedenen Werten Oa_1, Oa_1' variieren lassen, erhalten wir die Kurve $A_1C_1'A_1'C_1A_1$, deren Verlauf ganz analog dem der vorigen Kurve ist, und welche für einen und denselben Wert Op von $\mathfrak{H}$ zwei verschiedene Werte pP_1' und pP_1'' für $\mathfrak{B}$ ergiebt.

Man kann nun für jeden Punkt der Kurve OA und deren Verlängerung dieselbe Konstruktion wiederholen.

Diese Erwägungen berechtigen uns zu dem Schlusse, dass jedem Werte von $\mathfrak{H}$ unendlich viele, innerhalb gewisser Grenzen eingeschlossene Werte für $\mathfrak{B}$ entsprechen können. Folglich genügt es, um den Wert von $\mathfrak{B}$ zu bestimmen, nicht, den Wert von $\mathfrak{H}$ anzugeben, sondern es ist ausserdem nötig, die ganze Reihe der Werte, die $\mathfrak{H}$ schon vorher ange-

nommen hat, anzugeben. Man betrachte jetzt den Punkt P, in welchem man $\mathfrak{H} = Op$ und $\mathfrak{B} = pP$ hat, und lasse $\mathfrak{H}$ bis zu Null abnehmen, und dann wieder bis zum Werte Op anwachsen. Der Endpunkt der Ordinate, die den Wert von $\mathfrak{B}$ darstellt, beschreibt hierbei, indem, wenigstens mit hinreichender Annäherung, der Punkt P wieder erreicht wird, eine geschlossene Linie, welche von einem fallenden und einem ganz unterhalb des ersten verlaufenden, steigenden Stücke gebildet ist; die Tangenten in den Anfangspunkten beider Äste sind nahezu parallel zu der Abscissenachse.

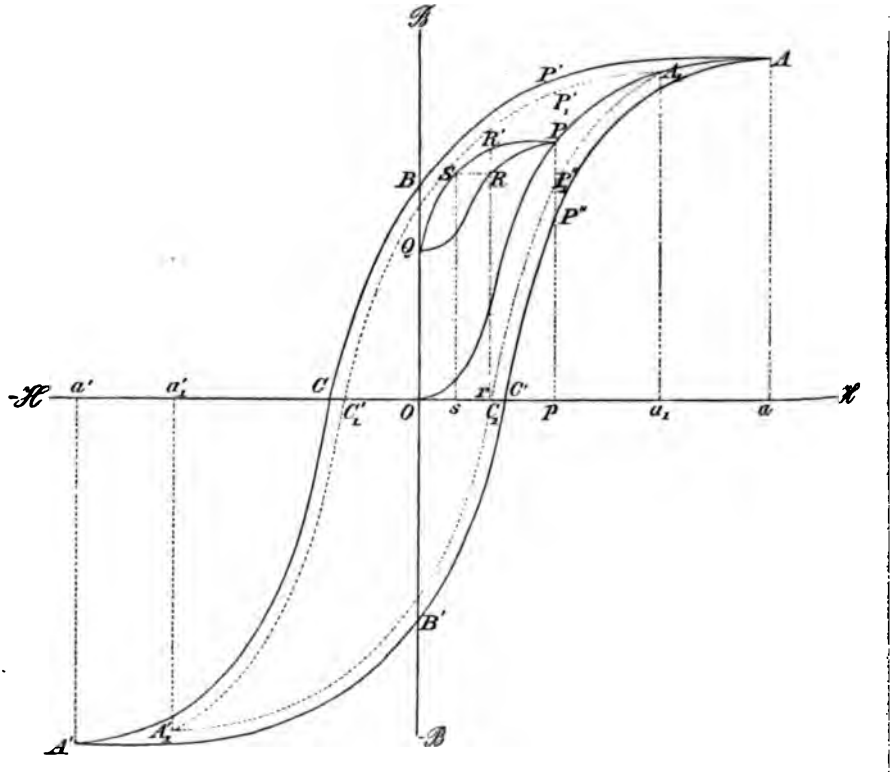


Fig. 92.

Im allgemeinen können wir sagen: wenn man $\mathfrak{H}$ in einer beliebigen Weise variieren und auf den ursprünglichen Wert zurückkehren lässt, wird auch $\mathfrak{B}$ mit hinreichender Annäherung den anfänglichen Wert wieder annehmen. Der Endpunkt der Ordinate, welche den Wert von $\mathfrak{B}$ als Funktion von $\mathfrak{H}$ angiebt, durchläuft eine geschlossene Linie, die man *magnetischen Zyklus* nennt. Man sagt, dass man das Material einen magnetischen Zyklus durchlaufen lässt, wenn man in demselben diese Änderungen von $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{B}$ hervorbringt.

In einem zyklischen Magnetisierungsprozesse hat man immer zwei
te zu betrachten, den steigenden für zunehmende, und den fallenden
abnehmende Werte von $\mathfrak{H}$; in ihren Anfangspunkten sind ihre
ngenten als nahezu parallel zur Abscissenachse anzusehen; ferner liegt
fallende Ast immer oberhalb des steigenden. Wir können dies
lers ausdrücken, indem wir sagen, dass der Zyklus immer dem Sinne
Uhrzeigers entgegengesetzt durchlaufen werden muss, wenn man, wie
ich, als positive Richtung für $\mathfrak{H}$ die Richtung von links nach rechts,
$\mathfrak{B}$ die von unten nach oben annimmt.

In dem Zyklus PQ, den wir betrachtet haben, entsprechen einem
demselben Wert Or von $\mathfrak{H}$ zwei Werte für $\mathfrak{B}$; der dem fallenden
entsprechende Wert rR' ist immer grösser als der Wert rR, der dem
genden Ast angehört. Auf den Wert, welchen $\mathfrak{B}$ für einen gegebenen
rt von $\mathfrak{H}$ annimmt, ist es von erheblichem Einfluss, welchen Wert
vorher für nahe gelegene Werte von $\mathfrak{H}$ inne hatte; man kann sagen,
$\mathfrak{B}$ das Bestreben hat, den Wert, den es bei einem bestimmten Werte
$\mathfrak{H}$ inne hatte, auch bei einer Veränderung von $\mathfrak{H}$ beizubehalten,
, in anderen Worten, die magnetische Induktion $\mathfrak{B}$ zögert den Ver-
erungen nachzukommen, welchen wir sie durch die Veränderungen der
netischen Kraft $\mathfrak{H}$ unterziehen wollen.

Die Erscheinung kann auch auf folgende Weise aufgefasst werden.
der Stelle R ausgehend, für welche $\mathfrak{H} = Or$ und $\mathfrak{B} = rR$ ist,
e man $\mathfrak{B}$ den steigenden Ast RP durchlaufen und verfolge man dann
fallenden Ast; wenn $\mathfrak{H}$ den Wert Or wieder angenommen hat, be-
$\mathfrak{B}$ einen Wert $rR' > rR$; damit $\mathfrak{B}$ den ursprünglichen Wert er-
, ist es nötig, dass $\mathfrak{H}$ einen Wert $Os < Or$ annehme. Wenn wir
Bewegung der Projektionen des beweglichen Punktes auf die Koordi-
nachsen ins Auge fassen, sehen wir, wie die Bewegung der Projektion
der Ordinatenachse eine Verzögerung in bezug auf die Bewegung der
ektion auf der Abscissenachse erfährt, d. h. die Änderungen von $\mathfrak{B}$
lgen gewissermassen mit einer Verspätung gegenüber den Änderungen
$\mathfrak{H}$.

Prof. Ewing erteilte dieser Eigenschaft der magnetischen Materialien
Namen *Hysteresis*, welchen er aus dem griechischen Wort ὑστερεῖν,
ckbleiben, ableitete.

Die Existenz der magnetischen Zyklen ist eine Folge des Vorhanden-
s der Hysteresis als einer charakteristischen Eigenschaft magnetischer
erialien. Wir können die Erscheinung der Hysteresis mit bekannten
hanischen Erscheinungen vergleichen.

Wenn eine vom Werte Null aus anwachsende Kraft einen Körper
reift, auf welchen andere Körper Reibung ausüben, so setzt er sich

nicht sofort in Bewegung, sondern erst dann, wenn die Kraft einen gewissen Wert erreicht hat; die Reihe der Werte der Verschiebungen folgt den Kraftänderungen mit einer gewissen Verspätung. Dies genügt, uns zu veranschaulichen, dass die Hysteresis als von einer inneren Reibung hervorgebracht gedacht werden kann, welche die Orientierungsbewegung der Molekeln hemmt, wenn wir die Hypothese annehmen, dass die Magnetisierung von einer besonderen Orientierung der Molekeln innerhalb der magnetischen Materialien herrührt.

Viel vollständiger ist die Analogie zwischen den magnetischen und den elastischen Erscheinungen, wenn man die magnetische Verschiebung oder Induktion mit der elastischen Deformation und die magnetische Kraft mit der deformierenden Kraft vergleicht. Die Körper, bei welchen die magnetische Induktion eine bekannte Funktion der magnetischen Kraft ist, gleichen den vollkommen elastischen Körpern, für welche einem gegebenen Wert der deformierenden Kraft ein einziger, bestimmter Wert für die Deformation zukommt. Die magnetischen Körper dagegen, in welchen die Hysteresis existiert, verhalten sich wie unvollkommen elastische Körper, welche je nach der Stärke und Wirkungsdauer der vorher wirksam gewesenen deformierenden Kraft verschiedene Deformationen aufweisen. Wenn wir z. B. einen Stab aus einer unvollkommen elastischen Substanz der Wirkung einer von Null nach und nach ansteigenden Kraft aussetzen, welche ihn zu verlängern sucht, so beginnt der Stab sich erst zu strecken, wenn die Kraft einen gewissen Wert erreicht hat. Wenn wir, sobald eine gewisse Verlängerung erlangt ist, die Kraft allmählich verringern, so verkürzt sich der Stab erst nach einer gewissen Zeit; die Stablänge behält hierbei immer grössere Werte als diejenigen, die denselben Werten der Kraft während der Verlängerung entsprachen. Man hat also eine vollkommene Analogie zwischen den Erscheinungen der elastischen Nachwirkung und denen der magnetischen Hysteresis.

87. Retentionsvermögen. Koerzitivkraft. — Wir haben bemerkt, dass die Induktion $\mathfrak{B}$, wenn $\mathfrak{H}$ von Null bis zu einem gewissen Werte Oa gesteigert und wieder zu Null gebracht wird, nicht zu Null zurückkehrt, sondern einen gewissen Wert behält; man kann folglich von einem Rückstand oder einer *Remanenz der magnetischen Induktion* reden, welcher eine rückständige oder *remanente Magnetisierung* entspricht, deren Wert aus der Formel (23)

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{H} + 4\pi J$$

leicht ermittelt werden kann, welche für $\mathfrak{H} = 0$

$$J = \frac{\mathfrak{B}}{4\pi}$$

ergiebt.

Um die remanente Magnetisierung verschwinden zu lassen, genügt nicht, die magnetische Kraft zu vernichten, sondern man muss dieselbe kehren und ihr einen gewissen Wert erteilen.

Dr. Hopkinson gab der remanenten Induktion OB den Namen *ntionsvermögen**), und der Kraft OC', welche notwendig ist, um die ktion auf den Wert Null zu bringen, den Namen *Koerzitivkraft.*

Früher nannte man die bekannte Eigenschaft des Eisens und der verwandten Körper, besonders des Stahles, beim Aufhören der magierenden Kraft einen remanenten Magnetismus beizubehalten, „Reonsvermögen"; man nannte ferner Koerzitivkraft die Ursache dieses ständigen Magnetismus und nahm letzteren als Mass für die Koerzitivt, was selbstverständlich nicht richtig war, weil der Magnetismus e Kraft ist.

Dr. Hopkinson gab den alten Benennungen eine bestimmte und gnete Bedeutung; die Koerzitivkraft, wie sie von ihm definiert wird, ine wirkliche magnetische Kraft.

Früher sagte man, weil der Stahl nach Aufhören der die Magnetiung hervorbringenden Ursache gewöhnlich viel stärker als das Eisen netisiert bleibt, dass in dem Stahl das Retentionsvermögen viel grösser ls im Eisen.

Wenn die Thatsache an sich richtig ist, so ist doch die Erklärung, man dafür gab, falsch. Aus den Kurven der magnetischen Induktion das Eisen und den Stahl (Fig. 90, 91) ergiebt sich, dass im Eisen remanente Induktion grösser, die Koerzitivkraft dagegen viel kleiner ls im Stahl.

Versuchen wir durch diese Eigenschaft die Thatsache zu erklären, der Stahl nach Aufhören der magnetisierenden Ursache sich im allinen stärker magnetisiert erhält als das Eisen.

Denken wir uns (Fig. 93) einen prismatischen Eisenstab in einem hförmigen magnetischen Felde, dessen Stärke $\mathfrak{H}'$ nach Belieben vert werden kann. Durch die Wirkung Kraft $\mathfrak{H}'$ hat man in dem Stabe gewisse Magnetisierung J hervorfen, und es ist eine nordmagneie Verteilung von freiem Magnetisauf AB und eine südmagnetische CD entstanden. Auf einen Punkt P innerhalb des Magneten wirken zwei Kräfte, die vom homogenen Felde herrührende Kraft $\mathfrak{H}'$ und zu dieser entgegengesetzt gerichtete Kraft $\mathfrak{H}''$, die von den Massen

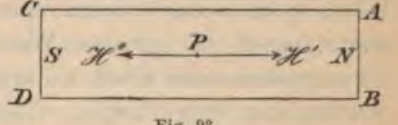


Fig. 93.

*) In der Litteratur hat sich dafür die Bezeichnung *Remanenz* eingebürgert.

von freiem Magnetismus hervorgebracht wird und entmagnetisierend wirkt. Die Kraft $\mathfrak{H}$, die in Wirklichkeit auf den Punkt P wirkt, ist die Resultierende aus den beiden Kräften $\mathfrak{H}'$ und $\mathfrak{H}''$, und wir müssen dieselbe ins Auge fassen, um die Beziehungen der Induktion zur magnetischen Kraft zu erörtern. Früher sagte man, dass mit der Intensität $\mathfrak{H}'$ des gleichförmigen magnetischen Feldes auch die auf P wirkende magnetische Kraft zu Null werde. Dies ist aber nicht richtig; es bleibt noch eine entmagnetisierende Kraft, weil die freien, auf den gegenüberliegenden Endseiten des Stabes verteilten magnetischen Massen wegen des Retentionsvermögens nicht vollständig verschwinden. Indem man also die erste Ursache der Magnetisierung, z. B. einen ein magnetisches Feld hervorrufenden elektrischen Strom aufhebt, wird die magnetische Kraft nicht Null. Man muss vielmehr umgekehrt, um den diesem Zustande des Körpers entsprechenden Wert der Induktion und folglich der Magnetisierung zu erhalten, in unseren Kurven den Wert von $\mathfrak{B}$ suchen, der nicht dem Werte $\mathfrak{H} = 0$, sondern dem von der entmagnetisierenden Kraft gegebenen negativen Wert von $\mathfrak{H}$ zukommt.

Bei dem Eisen, in welchem die Koerzitivkraft klein ist, kann die entmagnetisierende Kraft leicht den Wert der Koerzitivkraft erreichen, und deswegen hört die Magnetisierung mit dem Aufhören ihrer Ursache nahezu vollständig auf.

Beim Stahl dagegen, in welchem die Koerzitivkraft einen grossen Wert besitzt, behält die magnetische Induktion beim Aufhören der magnetisierenden Ursachen noch einen erheblichen Wert bei, beispielsweise den Wert tT (Fig. 91) für einen negativen Wert Ot der magnetischen Kraft. Es ist bekannt, dass die permanenten Magnete, eben dieser Eigenschaft des Stahles wegen, aus diesem Materiale hergestellt werden.

Als Bestätigung des Gesagten ist noch zu bemerken, dass man im weichen Eisen grössere Werte der Induktion und der Magnetisierung beim Aufhören der magnetisierenden Ursache als im Stahl wahrnehmen kann, wenn beim ersteren eine Anordnung getroffen wird, welche gestattet, auch bei grossen Werten der Magnetisierung nur eine kleine entmagnetisierende Kraft zu erhalten; letzteres erreicht man z. B. durch Verwendung sehr langer, dünner, oder noch besser ringförmig gebogener Stäbe.

Die Hysteresis ist die Ursache, dass das Retentionsvermögen und die Koerzitivkraft bestimmte Werte besitzen; die Existenz permanenter Magnete ist also eine Folge der Hysteresis. Wenn keine Hysteresis vorhanden wäre, dann könnte man keine von statischen Bedingungen abhängigen magnetischen Felder haben. Die permanenten Magnete, deren

achtung wir an den Anfang unserer Untersuchung stellten, können nach unsern zuletzt entwickelten Anschauungen keineswegs als die achsten magnetischen Gebilde angesehen werden.

---

§ 4.

Magnetische Feldenergie.

88. Arbeit, die von den magnetischen Kräften zur Veränderung der schiebung geleistet wird. Bei unserem Studium haben wir nach und h die Newton'sche Auffassung von fernwirkenden Massen von Agens ch den Maxwell'schen Begriff der Verschiebung ersetzt, welcher er der Thatsache entspricht, dass die magnetischen Erscheinungen im ganzen Raume, also sowohl innerhalb magnetischer Körper auch in dem zwischen diesen befindlichen Medium, abspielen. hematisch ist die Verschiebung vollständig bestimmt, weil wir die e durch die Beziehung definiert haben, welche sie mit der magne- nen Induktion verbindet; aber vom physikalischen Gesichtspunkte aus nen wir keine bestimmte Deutung für dieselbe geben; man hat sie der Verschiebung eines den ganzen Raum ausfüllenden unverdicht- n Fluidums verglichen, aber nichts berechtigt uns zu behaupten, diese Verschiebung in einem magnetischen Felde thatsächlich statt- e. Daher kann man die Folgerungen, die aus dieser Theorie abge- t und berechtigt sind, solange wir innerhalb der Grenzen bleiben, rhalb welcher wir die Verschiebung selbst definiert haben, nicht mehr e Kontrole durch das Experiment als mit den Thatsachen der Er- ung übereinstimmend ansehen, wenn man aus diesen Grenzen heraus- und andere willkürliche Hypothesen einführen muss.

So dürfen wir z. B., da wir bei der Definition der Verschiebung ts über Arbeit ausgesagt haben, nun auch ohne weiteres nichts darüber aupten. Wenn wir aber die von den magnetischen Kräften für eine erung der Verschiebung geleistete Arbeit berechnen, indem wir die othese aufstellen, dass jene Arbeit der von den bezüglichen auf ein erdichtbares Fluidum wirkenden Kräften geleisteten Arbeit entspreche, n jedes Teilchen des Fluidums eine Verschiebung gleich der Änderung magnetischen Verschiebung in dem Punkte erfährt, und wenn wir dann Ergebnissen kommen, welche durch die Erfahrung bestätigt werden, so nen wir daraus schliessen, dass der Begriff „Verschiebung" auch auf Betrachtung der Arbeit ausgedehnt werden darf.

Berechnen wir nach dieser Hypothese die Arbeit eines magnetischen Feldes für eine gegebene Änderung der Verschiebung.

Es sei (Fig. 94) eine unendlich dünne Induktions- oder Verschiebungsröhre gegeben, von welcher wir einen zwischen zwei senkrechten Schnitten AA und BB begrenzten Teil betrachten, mit der im Vergleich zu den Dimensionen der Schnitte sehr grossen Länge l, die aber klein genug ist, damit der betrachtete Röhrenteil als zylindrisch angesehen werden kann. Wenn die Verschiebung in einem beliebigen Schnitte MM vom Flächeninhalte a eine verschwindend kleine Veränderung db erfährt, so geht durch diesen Schnitt in der Richtung b, nach welcher die Verschiebung variiert, eine Menge des Fluidums adb. Weil das Fluidum unverdichtbar ist, so geht durch jeden Schnitt der Röhre dieselbe Menge adb des Fluidums hindurch; die Wirkung der Verschiebungsänderung reduziert sich also darauf, dass in das betrachtete Volumen durch die Seite AA eine Menge adb des Fluidums eingeführt und durch die Seite BB eine gleiche Menge aus demselben hinausgetrieben wurde, d. h. dass die Menge adb des Fluidums von der Lage $AAA'A'$ zur Lage $BBB'B'$ übertragen wurde. Die für die Änderung der Verschiebung geleistete Arbeit ist diejenige, die notwendig ist, um diese Verlegung auszuführen. Wenn $\mathfrak{H}$ der Wert der Kraft und θ der Winkel derselben mit der Verschiebung b ist, so wirkt auf die Masse adb eine Kraft $adb\mathfrak{H}$, welche als Tangentialkomponente den Wert $adb\mathfrak{H}\cos\theta$ hat und folglich zur Bewegung der Masse längs der Wegstrecke l die Arbeit

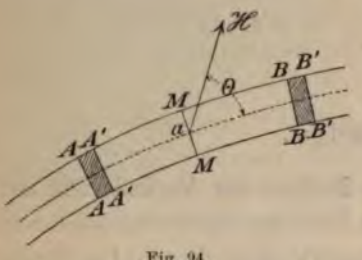


Fig. 94.

$$l a db \mathfrak{H} \cos\theta$$

verrichtet.

Dies ist der Ausdruck der in dem betrachteten Teile der Röhre geleisteten Arbeit, und da dieser Teil das Volumen la besitzt, so können wir die für die Volumeneinheit geleistete Arbeit durch folgende Formel ausdrücken:

$$w = \mathfrak{H}\, db \cos\theta. \tag{25}$$

Wir werden später sehen, dass die Erfahrung diesen Ausdruck für die Arbeit, die einer thatsächlichen Verschiebung entspricht, bei den durch elektrische Ströme hervorgebrachten magnetischen Feldern bestätigt; einstweilen können wir ihn ohne weiteres auf die schon betrachteten magnetischen Felder ausdehnen.

Betrachten wir zunächst den wichtigen, besonderen Fall, dass $\theta = 0$

$\mathscr{H}$ und b gleichgerichtet seien, den Fall, welcher einem
der Kraft $\mathscr{H}$ in einem homogenen Medium erzeugten
Felde entspricht. Die für die Volumeneinheit zu leistende
nn von dem Ausdrucke

$$w = \mathscr{H}\, db$$

her noch in die Form

$$w = \frac{1}{4\pi}\mathscr{H}\, d\mathscr{B}$$

den kann.

e Kurve, die als Abscissen die Werte von $\mathscr{H}$ und als Or-
igen von $\mathscr{B}$ hat, gegeben ist, so ist es leicht, die graphische
ler Arbeit für die Volumeneinheit zu finden, welche von
h kleinen oder einer endlichen
r Induktion verursacht wird.
ve AB (Fig. 95) möge die Ab-
r Grösse $\mathscr{B}$ als einer Funktion
tellen. Betrachten wir einen
der Abscisse mM, und geben
ate Om einen unendlich kleinen

$$mn = d\mathscr{B},$$

als neue Abscisse der Wert
Die unendlich kleine Fläche
t uns, abgesehen von unend-
Grössen höherer Ordnung, das

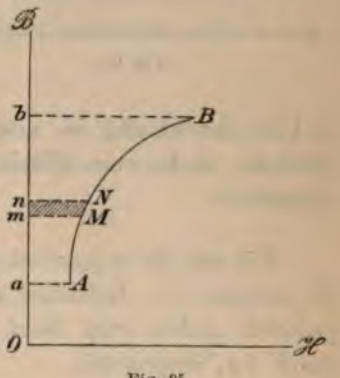


Fig. 95.

$\mathscr{B}$ und folglich die der Variation $d\mathscr{B}$ entsprechende Arbeit
rt mit 4π, dar. Wenn man nun eine endlich grosse Änderung
betrachtet, welche nach der Linie AB stattfindet, so ist
Arbeit

$$W = \frac{1}{4\pi}\int_{0a}^{0b} \mathscr{H}\, d\mathscr{B}$$

ieler Elementararbeiten, die alle, abgesehen von einem kon-
r, von einer Fläche wie $MmnN$ dargestellt sind; folglich
mte Arbeit durch die ganze Fläche $AabB$ dargestellt.

den magnetischen Kräften eines Feldes, in welchem die In-
gegebene Änderung erfährt, für die Volumeneinheit geleistete
abgesehen von dem konstanten Faktor $\left(\frac{1}{4\pi}\right)$, *durch den Inhalt*
sgedrückt, welche von der Induktionskurve, der Ordinatenachse
issen der äussersten Punkte der Kurve begrenzt wird.

89. Hysteretische Körper. Zyklische Magnetisierungsprozesse. — Betrachten wir einen Körper, welcher die Erscheinungen der magnetischen Hysteresis zeigt, und unterwerfen wir denselben einer zyklischen Magnetisierung $AMBM_1A$ (Fig. 96). Während die Induktion vom Werte Oa zum Werte Ob wächst, leisten die Kräfte des Feldes für die Volumeneinheit des Körpers eine positive, von der Fläche $aAMBba$ dargestellte Arbeit. Während dagegen die Induktion wieder zum Werte Oa längs des fallenden Astes BM_1A, für welchen $d\mathfrak{B}$ negativ ist, abnimmt, leisten die Kräfte des Feldes eine negative, von der Fläche $BbaAM_1B$ ausgedrückte Arbeit. Die gesamte von den Kräften des Feldes verrichtete Arbeit, wenn der Körper den vollständigen Zyklus durchläuft, ist also von der Differenz der beiden betrachteten Flächen, d. h. vom Flächeninhalte der den Zyklus bildenden Kurven dargestellt.

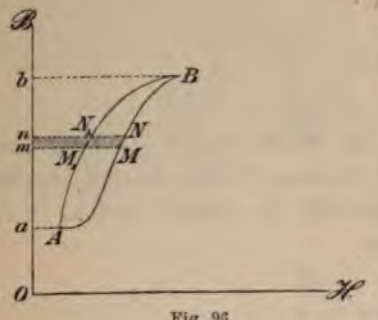


Fig. 96.

Die von den magnetischen Kräften für die Volumeneinheit eines Körpers, in welchem die Induktion durch einen vollständigen Zyklus hindurchgeht, geleistete Arbeit wird durch den Flächeninhalt der Zykluskurven, dividiert durch 4π, ausgedrückt.

Wie wir bereits bemerkt haben, wird ein magnetischer Zyklus immer so durchlaufen, dass das fallende Stück oberhalb liegt und folglich dieser Flächeninhalt positiv ist. Deswegen ist die von den Kräften des Feldes geleistete Arbeit, wenn ein Körper einen magnetischen Zyklus durchläuft, jeweilig als eine verausgabte Arbeit aufzufassen, deren Äquivalent man als Wärme in dem Medium, worin die Induktion variiert, wiederfindet.

Bei jenen Zyklen, welche zwischen entgegengesetzt gleichen Werten der magnetischen Kraft und Induktion durchlaufen werden, hängt der Flächeninhalt der Zykluskurven und folglich auch die aufgewandte Arbeit, wenn das Material gegeben ist, lediglich von den Maximalwerten von $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{B}$ ab. Diese Funktionen wird man aus den experimentellen Ergebnissen ableiten müssen. Ewing und Hopkinson stellten, indem sie den Flächeninhalt der verschiedenen Zyklen massen und durch 4π dividierten, Tabellen auf, welche für verschiedene Materialien die für die Volumeneinheit aufgewandte Arbeit als eine Funktion des Maximalwertes von $\mathfrak{B}$ ergeben. Steinmetz fand, dass die experimentellen Resultate in die folgende Formel

7) $$W = \eta \mathfrak{B}^{1.6}$$ *)

sammengefasst werden können, wobei W die Arbeit bedeutet, die man für e Volumeneinheit des Materials aufwenden muss, um sie einen magnetischen klus zwischen zwei gleichen und entgegengesetzten Werten $+\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B}$ der magnetischen Induktion durchlaufen zu lassen, und η eine n Material abhängende Konstante bedeutet. Für weiches, ausgeglühtes, ır reines Eisen kann man

$$\eta = 0{,}002$$

ıehmen.

Die Steinmetz'sche Formel eignet sich ziemlich gut zu den prak- hen Berechnungen der Werte von $\mathfrak{B}$, welche dem merklich gerad- igen, steilen Teile der Kurve entsprechen. Neuere Versuche haben er- sen, dass man für Werte von $\mathfrak{H}$ in der Nähe des Knies M, in der rmel (27) für den Exponenten von $\mathfrak{B}$ einen grösseren, näher bei 2 genden Wert annehmen muss.

90. Körper ohne Hysteresis. Feldenergie. — Betrachten wir jetzt en Körper, in welchem die magnetische Induktion einfach der mag- ischen Kraft proportional ist, lass die Beziehungen bestehen

$$\mathfrak{B} = \mu \mathfrak{H}, \qquad J = \varkappa \mathfrak{H}.$$

Dies findet in der Luft und gemein in allen wenig mag- ischen und diamagnetischen terialien statt.

In diesem Falle wird die ie der magnetischen Induk- n zu einer durch den Ur- ung hindurchgehenden Ge- en OA (Fig. 97).

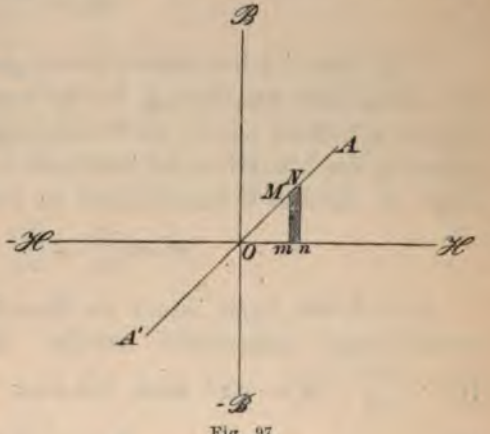


Fig. 97.

Stellen wir uns vor, wir sen in dem Körper die mag- ische Kraft vom Werte $\mathfrak{H}_1 = Om$ zum Werte $\mathfrak{H}_2 = On$, und folg- ı die Induktion vom Werte $\mathfrak{B}_1 = mM$ zum Werte $\mathfrak{B}_2 = nN$ variieren.

Wir können die zur Erzeugung dieser Änderung für die Volumen- heit aufzuwendende Arbeit als eine Funktion von $\mathfrak{H}$ oder von $\mathfrak{B}$ cht ausdrücken.

In dem allgemeinen Ausdrucke der Arbeit

*) In der Formel (27) ist die Arbeit in Erg pro cm³ ausgedrückt, wenn die gnetische Kraft und Induktion in absoluten C. G. S.-Einheiten angegeben sind.

$$W = \frac{1}{4\pi} \int \mathfrak{H} \, d\mathfrak{B}$$

ersetzen wir $\mathfrak{H}$ durch den Wert $\mathfrak{H} = \frac{1}{\mu} \mathfrak{B}$ und integrieren wir zwischen den Grenzen $\mathfrak{B}_1$ und $\mathfrak{B}_2$:

$$W = \frac{1}{4\pi\mu} \int_{\mathfrak{B}_1}^{\mathfrak{B}_2} \mathfrak{B} \, d\mathfrak{B} = \frac{1}{8\pi\mu} (\mathfrak{B}_2^2 - \mathfrak{B}_1^2).$$

Im besonderen muss man, um im Körper eine Änderung der Induktion vom Werte Null zum Werte $\mathfrak{B}$ hervorzubringen, eine Arbeit

$$W = \frac{\mathfrak{B}^2}{8\pi\mu}$$

aufwenden.

Dieselbe Arbeit kann als eine Funktion von $\mathfrak{H}$ allein ausgedrückt werden; indem man in die vorige Formel für $\mathfrak{B}$ den Ausdruck $\mu\mathfrak{H}$ einsetzt, erhält man:

$$W = \frac{\mu}{8\pi} \mathfrak{H}^2;$$

oder als Funktion von $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{H}$

$$W = \frac{\mathfrak{B}\mathfrak{H}}{8\pi}.$$

Setzt man im besonderen in den gefundenen Ausdrücken $\mu = 1$, w mit genügender Annäherung für die unmagnetischen und diamagnetisch Körper zutreffend ist, so wird man folgende Ausdrücke für die zur V änderung der Induktion und der Kraft vom Werte Null bis zum Werte bezw. $\mathfrak{H}$ für die Volumeneinheit zu verrichtende Arbeit finden:

$$W = \frac{\mathfrak{B}^2}{8\pi} = \frac{\mathfrak{H}^2}{8\pi} = \frac{\mathfrak{H}\mathfrak{B}}{8\pi}.$$

Die Arbeit kann ferner als Funktion der magnetischen Kraft u Verschiebung ausgedrückt werden. Indem man in dem Ausdruck $W = \frac{\mathfrak{B}\mathfrak{H}}{8\pi}$ $\mathfrak{B} = 4\pi b$ setzt, hat man

$$W = \frac{1}{2} b\mathfrak{H}. \tag{38}$$

Dieser Ausdruck ist dem durch die Formel (12) [45] gegebenen ga analog, (der die elektrische Arbeit als Funktion der elektrischen Kra und Verschiebung angiebt) und ist ferner analog dem Ausdrucke d Arbeit, mit der durch eine gegebene Kraft eine Deformation in eine vollkommen elastischen Körper erzeugt wird.

Lassen wir einen Körper, dessen Permeabilität μ konstant ist, ein magnetischen Zyklus durchlaufen, lassen wir nämlich in demselben und $\mathfrak{H}$ nach einem beliebigen Gesetze variieren, aber so, dass dieselb

ihre ursprünglichen Werte wieder annehmen. Es passiert dann, weil jedem Werte von $\mathfrak{H}$ ein einziger Wert von $\mathfrak{B}$ entspricht, die Grösse $\mathfrak{B}$ in der fallenden Reihe dieselben Werte, die sie für gleiche Werte von $\mathfrak{H}$ in der steigenden Reihe besass; die beiden Äste des Zyklus fallen in eine einzige Strecke MN der Geraden OA zusammen, die zweimal, aber in verschiedenem Sinne, durchlaufen wird. Der Flächeninhalt des Zyklus, und folglich auch die gesamte Arbeit, die aufgewandt wurde, um den Körper der zyklischen Magnetisierung zu unterwerfen, verschwindet; die Arbeit, die bei dem steigenden Ast aufgewandt wurde, wird bei dem sinkenden Ast vollständig zurückgegeben. Ein magnetisches Feld stellt uns also eine *potentielle Energie* dar; um das Feld zu erzeugen, muss man für die Volumeneinheit eine Arbeit $\frac{1}{2} b\mathfrak{H}$ aufwenden, welche in demselben aufgespeichert bleibt und vollständig zurückerstattet wird, sobald die magnetische Verschiebung aufhört.

Bei den hysteretischen Körpern dagegen wird nicht die ganze zur Erzeugung des Feldes aufgewandte Arbeit zurückgegeben, sobald dasselbe verschwindet; infolge des Vorhandenseins der Hysteresis wird ein Teil dieser aufgewandten Arbeit in Form von Wärme verzehrt.

Viertes Kapitel.

Elektromagnetismus.

§ 1.

Magnetische Felder, welche durch Änderungen der elektrischen Verschiebung erzeugt werden.

91. Magnetische Wirkungen elektrischer Ströme. Geradlinige und kreisförmige Strombahn. Solenoid. — Wir haben uns mit dem Studium der elektrischen und magnetischen Erscheinungen befasst, indem wir sie beide unabhängig von einander betrachtet haben. In einem und demselben Raume können aber auch ein elektrisches und ein magnetisches Feld zusammen existieren; diese Felder sind von einander unabhängig, so lange beide konstant bleiben; wenn aber der Zustand eines von beiden sich ändert, so entstehen auch in dem anderen Felde Änderungen, und ihre gegenseitige Unabhängigkeit hört dann auf.

Die allgemeinen Beziehungen zwischen den elektrischen und magnetischen Erscheinungen können in zwei Prinzipien, wie folgt, zusammengefasst werden:

Jedesmal, wenn die elektrische Verschiebung sich mit der Zeit ändert, entstehen magnetische Kräfte.

Jedesmal, wenn die magnetische Verschiebung sich mit der Zeit ändert, entstehen elektromotorische Kräfte.

Wir werden sehen, dass die hervorgebrachten Kräfte in beiden Fällen durch dasselbe Gesetz mit den Änderungen der Verschiebung in Beziehung stehen.

Es bieten sich also unserem Studium zwei neue Klassen von Erscheinungen dar, nämlich die in einem magnetischen Felde von einer Änderung der elektrischen Verschiebung, und die in einem elektrischen Felde von einer Änderung der magnetischen Verschiebung hervorgebrachten Veränderungen.

Wir werden uns vorerst mit den von einer Änderung der elektrischen Verschiebung hervorgebrachten magnetischen Wirkungen beschäftigen.

Es wird zweckmässig sein, zuerst der Grösse und dem Vorzeichen nach konstante Änderungen der elektrischen Verschiebung, d. h. Gleichströme ins Auge zu fassen; wir werden nachher unser Studium auf den Fall von beliebig veränderlichen Strömen leicht ausdehnen können.

Ein elektrischer Gleichstrom erzeugt in seiner Umgebung ein magnetisches Feld. Es ist in dieser Hinsicht der Versuch von Oersted grundlegend, welcher bewies, dass eine parallel zu einem von Gleichstrom durchflossenen, geradlinigen Leiter angeordnete Magnetnadel abgelenkt wird und sich senkrecht zu dem Stromträger einzustellen sucht. Betrachten wir beispielsweise einen sehr langen, senkrecht zu der Figurebene stehenden Draht, der von einem in bezug auf die Figurebene von vorn nach hinten gerichteten Strom i durchflossen wird (Fig. 98).*)

Im Raume um den Leiter i hat man ein magnetisches Feld. Wenn man in einen Punkt P eine nordmagnetische Masse setzt, so erfährt diese einen Bewegungsantrieb senkrecht zur Ebene iP in der Richtung des Pfeiles; bei entgegengesetzter Stromrichtung würde die Richtung der Kraft eine entgegengesetzte sein. Stellt man in P eine Magnetnadel auf, so wirkt auf deren Pole ein Kräftepaar, welches das Bestreben hat, die Nadel senkrecht zum Stromträger zu stellen.

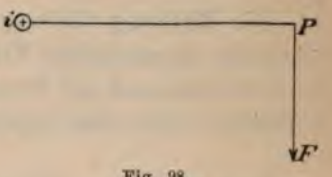


Fig. 98.

In diesem einfachen Falle einer geradlinigen Strombahn dienen uns folgende Regeln zur Bestimmung der Richtung des magnetischen Feldes.

Ampère'sche Schwimmregel. — Denkt man sich in dem Leiter in der Richtung des Stromes schwimmend, und betrachtet man die Magnetnadel, so wird ihr Nordpol nach der Seite der linken Hand abgelenkt. Nennen wir der Kürze halber linke und rechte Seite des Stromträgers die linke und rechte Seite des schwimmenden Beschauers und einfach Strom den Stromträger, so können wir sagen:

Das von einem geradlinigen Strom erzeugte magnetische Feld ist in jedem Punkte nach der linken Seite des Stromes gerichtet.

*) Indem wir einer von Prof. Silvanus P. Thompson vorgeschlagenen Bezeichnung folgen, werden wir die Richtung des Stromes in dem Schnitte eines Leiters mit der Figurebene mit einem Punkt oder mit einem Kreuz, je nachdem der Strom von hinten nach vorn oder umgekehrt gerichtet ist, darstellen. Der Punkt bedeutet die dem Beschauer zugewandte Spitze des Pfeiles, das Kreuz stellt dagegen die Feder des Pfeiles dar, der sich vom Beschauer entfernt. Dasselbe gilt auch, um die Richtung der Kraft- und Induktionslinien in solchen Fällen anzudeuten.

Maxwell'sche Regel. — Stellt man sich einen gewöhnlichen Korkzieher oder allgemein eine rechtsgängige Schraube mit der Achse in der Richtung des Stromes so angeordnet vor, dass die Spitze nach derselben weist, so ist die Richtung der Kraft diejenige, in welcher man das Heft des Korkziehers drehen muss, damit er in der Richtung des Stromes fortschreitet.

Wir können uns den Korkzieher auch anders angeordnet denken, und zwar so, dass seine Achse mit einer durch den Punkt P (Fig. 98) gehenden, die Ebene iP senkrecht durchsetzenden Geraden zusammenfällt. Wenn man nun den Griff des Korkziehers derart dreht, dass dessen näher nach i hin liegender Teil in einem mit der Richtung von i übereinstimmenden Sinne sich bewegt, so schreitet der Korkzieher in der Richtung der Kraft fort.

Indem man diese beiden Regeln in eine zusammenfasst, kann man sagen:

Die Richtung eines geradlinigen Stromes und die des von ihm herrührenden magnetischen Feldes stehen in demselben Zusammenhang, wie die rotierende und die fortschreitende Bewegung bei einem gewöhnlichen Korkzieher oder einer rechtsgängigen Schraube.

Stellen wir uns nun, anstatt eines geradlinigen Teiles eines Stromes einen vollständigen Stromkreis vor; wir können uns leicht über das von demselben herrührende magnetische Feld Klarheit verschaffen, indem wir beachten, dass ein kleiner Teil des Stromkreises als geradlinig angesehen werden kann, und dass auf diesen die dargelegten Prinzipien angewandt werden können.

Betrachten wir z. B. den von einem Strome mit der Stärke i durchflossenen Stromkreis AB (Fig. 99). In einem beliebigen innerhalb des Stromkreises liegenden Punkte P bringen die einzelnen Stromelemente Kräfte hervor, welche die gleiche Richtung, in bezug auf die Figurebene von hinten nach vorn, besitzen und welche sich folglich addieren. Dagegen bringen in einem äusseren Punkte P' die Teile B und A des Stromkreises entgegengerichtete Kräfte hervor; es überwiegt natürlich die Wirkung des näher nach dem Punkte P' hin liegenden Teiles des Stromkreises; und es wird in dem Punkte P' eine Kraft hervorgebracht, welche in bezug auf die Figurebene von vorn nach hinten gerichtet ist. In diesem Felde hat also die Kraft in allen innerhalb des Stromkreises gelegenen Punkten P die gleiche Richtung, und so auch

Fig. 99.

allen äusseren P', aber die Richtung in den äusseren Punkten ist derjenigen in den inneren entgegengesetzt.

In Fig. 100 geben wir aus dem Lehrbuche der Elektrizität und des

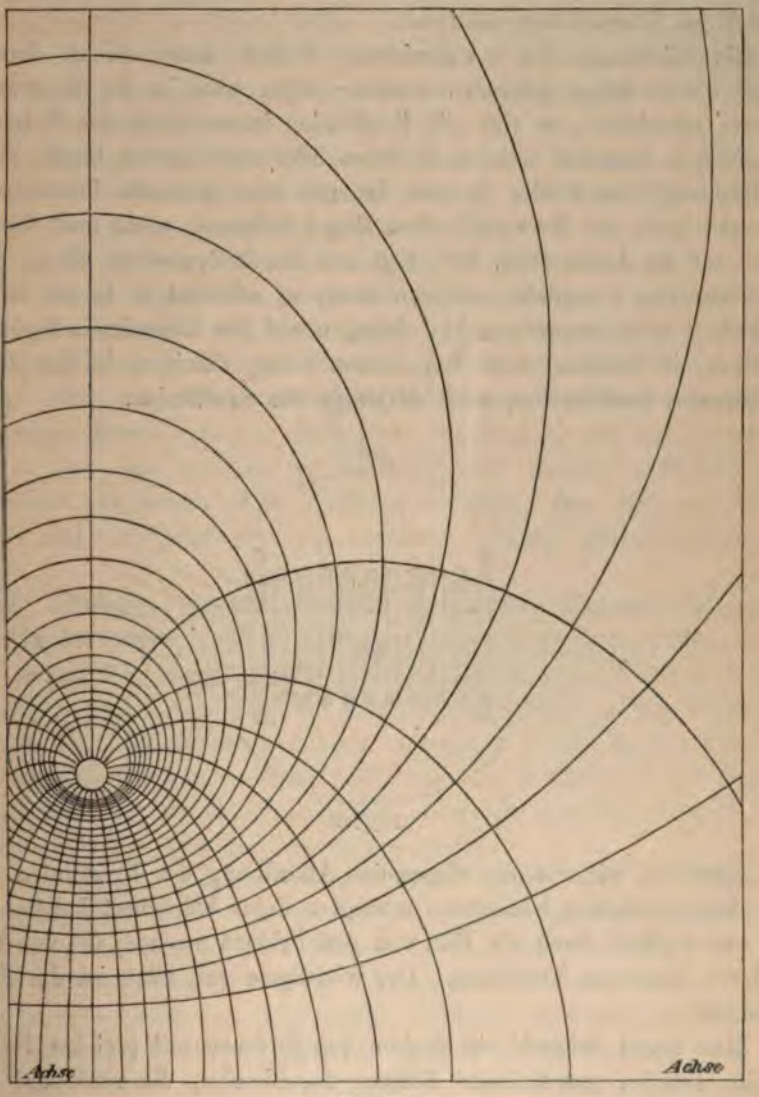


Fig. 100.

agnetismus von Prof. Clerk Maxwell die Zeichnung der Niveauflächen d Kraftlinien in dem von einem Kreisstrome erzeugten magnetischen elde wieder, und zwar stellt die Bildebene eine durch die Achse des

Die Kraftlinien sind geschlossene Linien,
Fläche des Stromkreises in der Figur-
diejenige Kraftlinie, die durch das Zentrum
genen Kreisfläche geht, ist eine Gerade,

schen Feldes kann leicht durch die
verden: wenn man in der Richtung des
Kraftlinien immer nach der linken Seite
innen oder nach aussen blickt, hat man
inneren oder äusseren Punkten. Man
schen Regel bedienen: wenn man den Kork-
legt und ihn in demselben Sinne, wie ihn
ren lässt, so schreitet er in der Richtung
an dagegen auf den Stromkreis legt, so ist
an drehen muss, damit er in der Richtung
derjenige der Kraftlinien.

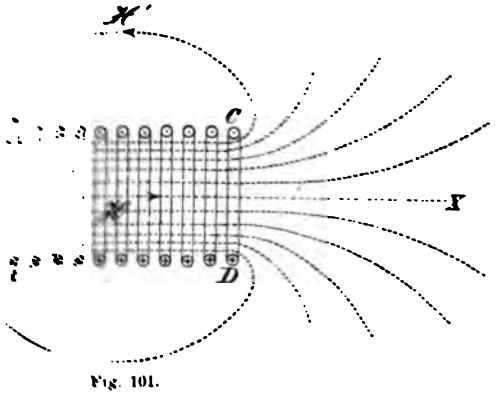


Fig. 101.

gemeine Anordnung der Kraftlinien in dem
erzeugten Felde betrachtet haben, können
von den Feldern machen, die von kompli-
Der wichtigste von allen ist der Fall der

System von Strömen mit gleicher Intensität,
Bahnen durchlaufen, die senkrecht zu der
schen Ort ihrer Mittelpunkte bildet und

en Fall eines zylindrischen Solenoids be-
bahnen kreisförmig und gleichmässig ver-
Achse des Solenoids geradlinig ist (Fig. 101).

Jeder der Kreisströme bringt Kraftlinien hervor, welche im Innern die Richtung $\mathfrak{H}$ und aussen in der Mitte die entgegengesetzte Richtung $\mathfrak{H}'$ haben. Der Komplex aller Kreisströme wird uns ein Bündel von Kraftlinien geben, welche das Solenoid in dem Sinne von $\mathfrak{H}$ mit einer mittleren Richtung parallel zu dessen Achse durchdringen, von dem rechten Ende ausgehen und sich ausserhalb des Solenoids schliessen; die Richtung des Feldes findet man leicht, indem man die Regel von Maxwell oder die von Ampère anwendet.

Ein System, welches sich praktisch wie ein Solenoid verhält, wird uns von einer Stromspirale mit gleichmässig verteilten Windungen geliefert. Wenn die Ganghöhe genügend klein ist, so wird man jede Windung als aus einer ebenen, kreisförmigen Strombahn und einer geradlinigen Verbindungsstrecke bestehend ansehen können; auf diese Weise ist eine Stromspirale mit dem System eines Solenoids und eines zur Achse parallelen, geradlinigen Stromes gleichwertig. Die Wirkung dieses Stromes kann man immer aufheben, indem man den Strom durch einen geradlinigen Draht von dem Ende, bei welchem er aus der Spirale austritt, zu dem, bei welchem er in die Spirale eintritt, zurückführt; im allgemeinen ist jedoch diese Wirkung so klein, dass man sie vernachlässigen und die Spirale wie ein einfaches Solenoid behandeln kann.

92. Analogie zwischen den von elektrischen Strömen und den von Magneten hervorgerufenen Feldern. — Die einfache Betrachtung des von einem Solenoid erzeugten Feldes (Fig. 101) führt sogleich die Ähnlichkeit vor Augen, die es mit dem von einem zylindrischen, in der Richtung J gleichförmig magnetisierten Körper erzeugten Felde besitzt (Fig. 81). In beiden Fällen gehen die Kraftlinien von einer Grundfläche des Zylinders aus und kommen bei der anderen an, indem sie ausserhalb des Magneten und des Solenoids dieselbe Anordnung zeigen.

Die Analogie zwischen beiden Feldern besteht nicht nur in der Verteilung der Kraftlinien, sondern sie ist vollkommen; alle Eigentümlichkeiten der von magnetischen Massen hervorgerufenen Felder sind auch bei den durch elektrische Ströme erzeugten Feldern vorhanden. Auch in diesen Feldern findet eine magnetische Induktion oder Influenz statt, durch welche sich ein ins Feld gebrachter Körper in der Richtung der Kraft magnetisiert, wenn er paramagnetisch ist, und in der entgegengesetzten, wenn er diamagnetisch ist. Wenn man z. B. in das Innere eines Solenoids einen Eisenkern bringt, so magnetisiert er sich, indem er einen Nordpol links, einen Südpol rechts von der Stromrichtung aufweist, wenn man sich, das Gesicht dem Innern des Solenoids zugekehrt, in der Strombahn mit dem Strome schwimmend vorstellt. Man hat so ein Mittel, mächtige

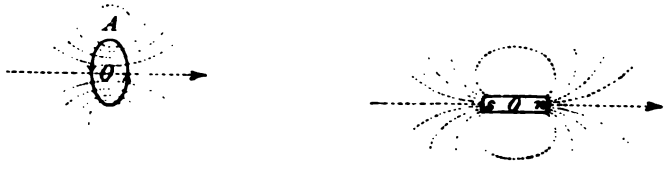
temporäre Magnete herzustellen, welche *Elektromagnete* genannt werden. Wenn der Kern, anstatt aus weichem Eisen, aus Stahl besteht, so behält er, seiner erwähnten Eigenschaften halber, nach dem Aufhören des magnetisierenden Stromes einen Teil der Magnetisierung bei; dies ist das einfachste Verfahren zur Herstellung permanenter Magnete.

Die elektrischen Kreisströme sind Magneten gleichwertig, nicht nur bezüglich der Wirkungen, die jene auf Magnete, sondern auch bezüglich derjenigen, welche die Magnete auf die Ströme und endlich die Ströme unter sich ausüben.

Bekannt sind in dieser Hinsicht die Versuche über die Richtwirkung eines magnetischen Feldes auf ein Solenoid und über die Wirkungen zwischen Magneten und Solenoiden und zwischen Solenoiden untereinander, welche beweisen, dass ein Solenoid sich vollständig wie ein Magnet verhält, dessen Nordpol links vom Strome liegt.

93. Prinzip der Äquivalenz. — Die Erfahrung lehrt, dass das von einem elektrischen Strome erzeugte magnetische Feld in allen praktischen Fällen, wie die Verhältnisse des Stromkreises auch seien, dem von einem passenden Magneten erzeugten Felde in allen seinen Eigenschaften gleichwertig ist; wir sind also zu der Annahme berechtigt, dass dies auch für unendlich kleine Ströme der Fall sei.

Betrachten wir einen unendlich kleinen, geschlossenen, von einem elektrischen Strome durchflossenen Stromkreis AB (Fig. 102). Durch die Wirkung des Stromes entsteht eine magnetische Verschiebung, welche den Stromkreis AB von der linken nach der rechten Seite des Stromes durchsetzt und sich aussen schliesst. Wenn wir uns nun im Mittel



gewisse Beziehungen bestehen. Weil die Wirkungen eines Elementarmagneten in die Ferne nicht von seinen Dimensionen, sondern lediglich von seinem magnetischen Moment abhängen, so folgt, dass für die Äquivalenz des Stromes und des Elementarmagneten das magnetische Moment des Magneten eine bestimmte Funktion der Stromstärke und der Dimensionen des Stromkreises sein muss.

Wenn wir zwei Elementarmagnete in einer beliebigen Weise vereinigen, ohne die Verteilung des Magnetismus, d. h. ohne das magnetische Moment abzuändern, so ist das System noch ein Magnet, dessen magnetisches Moment die Summe der magnetischen Momente der einzelnen komponierenden Magnete ist. Wenn diese gleich und so verbunden sind, dass beide das Nordende nach derselben Seite wenden, so ist das magnetische Moment des Systems, nach der Definition des magnetischen Moments selbst [64], doppelt so gross wie das magnetische Moment eines jeden Magneten.

Dieses Prinzip legt die Annahme nahe, dass das magnetische Moment eines Magneten, welcher dem System zweier gleicher, einander nahe liegender Ströme äquivalent ist, das Doppelte des magnetischen Moments von zwei Magneten ist, deren jeder einem einzelnen der Ströme äquivalent ist.

Es seien zwei gleiche Stromträger von der Form eines Rechtecks vorhanden, welche beide je eine Fläche vom Inhalt dS umschliessen und von einem Strome mit der Stärke i durchflossen werden. Wenn wir die Stromkreise zur Deckung bringen, und zwar so, dass beide vom Strome in derselben Richtung durchflossen werden, so ist das hieraus resultierende System in bezug auf seine Wirkung in die Ferne augenscheinlich einem Strome mit der Stärke $2i$, der einen der Stromkreise durchfliesst, äquivalent; andererseits ist nach dem Gesagten das magnetische Moment des dem System beider aufeinandergelegter Ströme äquivalenten Magneten doppelt so gross wie jenes, welches einem einzigen Strome entspricht; folglich wird dadurch, dass man den Strom verdoppelt, auch das magnetische Moment des äquivalenten Magneten verdoppelt.

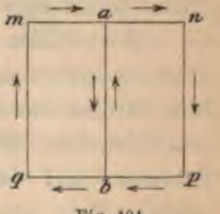


Fig. 104.

Wenn man dagegen die beiden Stromkreise so nebeneinander setzt (Fig. 104), dass eine Seite des einen auf eine Seite des anderen zu liegen kommt, und dass dieselben von dem Strome in der von den Pfeilen angedeuteten Richtung durchflossen werden, so wird die gemeinsame Seite ab von zwei entgegengesetzt gleichen Strömen durchflossen, deren Wirkungen sich gegenseitig aufheben. Dieses System ist also einem einzigen Strome mit der Stärke i äquivalent, welcher den Stromkreis $mnpq$ vom doppelten Flächeninhalte durchfliesst. Nach

temporäre Magnete herzustellen, welche *Elektromagnete*
Wenn der Kern, anstatt aus weichem Eisen, aus Stahl
er, seiner erwähnten Eigenschaften halber, nach dem A
netisierenden Stromes einen Teil der Magnetisierung b
fachste Verfahren zur Herstellung permanenter Magn

Die elektrischen Kreisströme sind Magneten gle
bezüglich der Wirkungen, die jene auf Magnete, s
derjenigen, welche die Magnete auf die Ströme u
unter sich ausüben.

Bekannt sind in dieser Hinsicht die Versuche
eines magnetischen Feldes auf ein Solenoid u
zwischen Magneten und Solenoiden und zwischen
welche beweisen, dass ein Solenoid sich vollstä
hält, dessen Nordpol links vom Strome liegt.

93. Prinzip der Äquivalenz. – Die Erf
einem elektrischen Strome erzeugte magnetis
Fällen wie die Verhältnisse des Stromkreise
passenden Magneten erzeugten Felde in alle
wertig ist, wir sind also zu der Annahme
unendlich kleine Ströme der Fall sei.

Betrachten wir einen unendlich klei
elektrischen Strome durchflossenen Strom
Wirkung des Stromes entsteht eine m
[illegible] von der linken na
[illegible] schliesst.

[illegible]

94. Äquivalenz zwischen einem magnetischen Blatte und einem Strome im endlichen, geschlossenen Kreise. Elektromagnetisches Masssystem. — Wenden wir das Prinzip der Äquivalenz auf einen Strom in einem geschlossenen, nicht unendlich kleinen Kreise an.

AB sei ein beliebiger Stromkreis (Fig. 105) mit endlichem Flächeninhalt, von einem Gleichstrome mit der Stärke i in der Richtung des Pfeiles durchflossen. Stellen wir uns eine beliebige, von der Linie AB begrenzte Fläche vor, und zerteilen wir dieselbe in unendlich kleine Flächenelemente mittels zweier Systeme von Linien, die nach einem beliebigen Gesetze gezogen sind. Denken wir uns die Begrenzung eines jeden dieser Elemente von einem Strome in derselben Richtung und mit derselben Stärke i durchflossen. Bezüglich der Wirkungen in die Ferne ist der Komplex dieser Ströme dem einzigen Strom in AB äquivalent. In der That, betrachten wir eine beliebige Trennungsseite ab zwischen zwei benachbarten Elementen p und q; dieselbe ist, weil jedem der beiden Elemente p und q angehörig, von zwei gleichen und entgegengerichteten Strömen durchflossen, welche entgegengesetzt gleiche, sich aufhebende Wirkungen hervorbringen. In bezug auf die äusseren Wirkungen ist es so, wie wenn alle Trennungsseiten zwischen zwei benachbarten Elementen nicht von einem Strome durchflossen wären; es bleiben folglich nur die Wirkungen der Ströme in jenen Seiten, die der Begrenzung der Fläche angehören, welche in ihrer Gesamtheit den einzigen Strom AB bilden. Dieser Strom AB kann also für die Fernwirkungen durch die Gesamtheit gleichstarker Ströme in den Elementarstromkreisen ersetzt werden. Nun ist jeder der Elementarströme einem kleinen Magneten mit der Achse senkrecht zu dem Flächenelement und mit dem Nordpol links vom Strome äquivalent; von diesem Magneten ist das magnetische Moment bestimmt, während dagegen die Form und die Dimensionen willkürlich sind. Wir können also annehmen, dass jeder Elementarmagnet aus einem kleinen Prisma aus magnetischem Material bestehe, welches als Schnitt die entsprechende Stromfläche hat und von zwei unendlich benachbarten Flächen begrenzt ist, von denen die eine auf der einen Seite der Fläche S, die andere auf der anderen Seite dieser Fläche liegt. Auf diese Weise bildet die Gesamtheit der Magnete eine kontinuierliche Schicht von magnetischer Substanz, welche eine Nordverteilung links, eine Südverteilung rechts vom Strome besitzt; ferner ist die Magnetachse und folglich auch die Richtung der Magnetisierung, da jeder

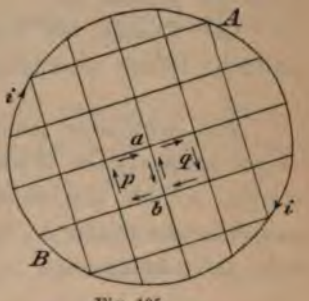


Fig. 105.

dem oben Gesagten … Punkte zu … valenten Magneten … chen normal. … sprechenden magnet… tisches Blatt, wel… Inhaltes der von … me AB gleichw… netische Momente … nd zwar ist das …

Es folgt, … welcher einem geg… S, Strome gleichw… Flächeneinheit ode… proportional ist. … Magneten, i die … $= hi$, Proportionalitäts… (1) …ärke i für jeden Ele…

Wir könnten … Falle eines Stromes, …

Ein in … … wie folgt ausgesproc… *im Raume …* *von einem …* …geschlossenen Stromkreise … *Stromkreises …* …einfachen magnetischen … *senkrecht zur …* …Begrenzung und eine der … *d. h. die Wir…* …Vorderseite dieses Blattes liegt (… *wenn das …* …folgt) links vom Beschauer. *stärke und …*

Wir … beiden Seiten des Blattes … gekommen. … geschlossenen Stromkreise äquiva… in allen … …lisierung die Richtung, nach … von permanen… …, wenn das Heft in dem Sinne … Prinzip wird … in strengem… …fläche S ist eine willkürliche; es … findet seine … …grenzung bestimmt sind, aber nic… geleiteten … …fläche ganz beliebig gewählt w…

Wir … …d in einem beliebigen Punkte des … Theorie … …tial und die Kraft von der Form … die Strö… auszudr… …) und (2) tritt eine Proportionalit… rührten, … …e Zahl, sondern eine physikalisch… ersten … …onen von h können, der Wahl … Äquival… …heiden sein. Wie man bei den … und allg… …der Elektrostatik die elektrostatisch… leiten … …Konstante k der Coulomb'schen … zeugten … …doch *Eins* ergiebt, so wird es bei de…

die wir jetzt behandeln, angebracht sein, eine neue Wahl der Einheiten so zu treffen, dass die Konstante h als absolute Zahl erscheint und gleich *Eins* wird. Man hat so ein neues Einheitssystem, welches das *elektromagnetische* genannt wird. Selbstverständlich wird man bei der Anwendung einer bestimmten Formel darauf Bedacht nehmen müssen, in welchem System die verschiedenen Grössen ausgedrückt sind; man wird leicht von einem zum anderen System übergehen können, wenn die Verhältnisse der Einheiten eines Systemes zu den entsprechenden des anderen bekannt sind. Wählt man elektromagnetische Einheiten, so hat man $h = 1$; folglich

$$\mathfrak{P} = i. \tag{2'}$$

Die Potenz des einem Strome äquivalenten einfachen Blattes ist numerisch gleich der in elektromagnetischen Einheiten ausgedrückten Stromstärke.

Wenn man in der Gleichung (2') $\mathfrak{P} = 1$ setzt, ergiebt sich auch $i = 1$; man kommt so zu dem Satze:

Die elektromagnetische Einheit der Stromstärke ist die Stärke des Stromes, welcher, in einem geschlossenen Kreise fliessend, bezüglich der magnetischen Wirkungen einem einfachen Blatte mit der Potenz Eins gleichwertig ist.

95. Tragweite des Prinzips der Äquivalenz. — Die Theorie, die wir entwickelt haben, beruht auf Versuchen, die in dem Raume ausserhalb des äquivalenten Magneten ausgeführt wurden; die daraus von uns abgeleiteten Folgerungen gelten also, so lange wir im diesem Raume bleiben; sie gelten aber nicht mehr im Innern des Magneten.

Betrachten wir einen Strom von der Stärke i in einem Stromkreise AB (Fig. 106), den wir der Einfachheit halber als eben und senkrecht zu der Figurebene voraussetzen. Das äquivalente Blatt mit der Potenz $\mathfrak{P} = i$ liege in der Ebene AB. Seine Dicke ist ganz willkürlich, und wir können annehmen, dass dieselbe den konstanten Wert λ besitze, sodass die Stärke der Magnetisierung

$$J = \frac{\mathfrak{P}}{\lambda} = \frac{i}{\lambda}$$

ebenfalls konstant ist.

Fig. 106.

Die Verteilungen des Magnetismus auf den Seiten des Blattes sind entgegengesetzt gleich und besitzen die Dichte

$$\sigma = J = \frac{i}{\lambda}.$$

Betrachten wir einen Punkt P innerhalb des Blattes und unendlich nahe bei P zwei äussere Punkte P' und P'', je an einer Seite des Blattes gelegen, und berechnen wir die Kräfte, die das Blatt in diesen Punkten ausübt. Der Punkt P befindet sich in denselben Zuständen, wie ein Punkt, der sich in einem unendlich dünnen, im Magneten hergestellten Schlitze befindet: die Kraft hat in P eine der Magnetisierung entgegengesetzte Richtung und den Wert

$$\mathfrak{K} = 4\pi\sigma = 4\pi\frac{i}{\lambda}.$$

In den Punkten P' und P'' greifen Kräfte an, welche beide die Richtung der Magnetisierung besitzen. Es folgt daraus, dass die Kraft, welche auf die Einheitsmasse wirkt, wenn diese von einer zur anderen Seite eines magnetischen Blattes durch dasselbe übergeht, eine sprungweise Änderung erfährt, welche auch unendlich gross sein kann.

Betrachten wir dagegen die vom elektrischen Strome hervorgebrachten magnetischen Kräfte. In den Punkten P' und P'' ausserhalb des Blattes fällt die vom Strome mit der vom Blatte herrührenden Kraft zusammen, aber im Punkte P findet diese Übereinstimmung nicht mehr statt. Im Falle des Stromes ist der Punkt P von den nahe gelegenen Punkten P' und P'' durch keine singuläre Fläche getrennt, folglich ist die Feldstärke in P, abgesehen von unendlich kleinen Grössen, die gleiche wie in P' und P''. Wir können uns darüber noch besser Rechenschaft geben.

Uns daran erinnernd, dass das einem Strome äquivalente magnetische Blatt eine beliebige Form besitzen kann, wenn nur seine Begrenzung mit dem Stromkreise zusammenfällt, können wir uns das Blatt beliebig, z. B. nach der Fläche ACB (Fig. 106) angeordnet denken; die Kräfte, die dasselbe auf die drei äusseren, einander unendlich nahe gelegenen Punkte P', P und P'' ausübt, sind, abgesehen von unendlich kleinen Grössen, gleich; folglich sind auch die vom Strome herrührenden Kräfte gleich.

Man hat also zwischen beiden Feldern diesen wesentlichen Unterschied, dass, während im Felde des magnetischen Blattes die Seiten des Blattes selbst singuläre Flächen und die Kraftlinien offen sind, im Felde des elektrischen Stromes die Kraftlinien geschlossene Linien sind, welche aussen mit den vom Blatte hervorgebrachten Kraftlinien zusammenfallen und innen die Fortsetzung der äusseren bilden.

Der Stromkreis und die von ihm erzeugten Kraftlinien sind verkettet, d. h. man kann sie von einander nicht trennen, ohne die Kraftlinien oder den Stromkreis selbst aufzuschneiden.

Man kann indessen behaupten, dass es keine Verteilung von Magnetismus giebt, welche dasselbe Feld wie ein elektrischer Strom hervorbringt und zwar deshalb, weil jede Verteilung von Magnetismus Diskon-

tätsflächen aufweist, welche im Stromfelde nicht vorhanden sind. Äquivalenz zwischen Strömen und Magneten gilt ausserhalb, aber innerhalb der Magnete.

Die Äquivalenz beider Felder ist dagegen vollständig, wenn man, tt der polar definierten Newton'schen Kraft $\mathfrak{K}$, die elektromagne- definierte Kraft $\mathfrak{B}$ oder (was dasselbe in dem magnetischen Mass- m ist, in welchem die numerischen Werte von $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B}$ zusammen- n) die magnetische Induktion $\mathfrak{B}$ betrachtet.

In beiden Fällen variiert die Induktion solenoidisch und weist keine ontinuitätsflächen auf; die Werte der Induktion in unendlich nahen kten wie P, P', P'' sind, wenn einer derselben innerhalb und die ren ausserhalb des Blattes liegen, abgesehen von unendlich kleinen sen, gleich; die Induktionslinien sind geschlossen. Also:

In jedem Punkte des Feldes ist der Wert der vom elektrischen Strome rgerufenen Induktion gleich dem Werte der Induktion, die von dem valenten Blatte herrührt.

Wenn im Felde des Stromes kein magnetisches Material vorhanden aben magnetische Kraft und Induktion, wie bekannt, in jedem Punkte elben Wert; wir können also sagen:

Ist im Felde kein magnetisches Material vorhanden, so ist der Wert om Strome herrührenden magnetischen Kraft gleich dem Werte der vom valenten Blatte hervorgerufenen Induktion.

96. Geradliniger Strom. Gesetz von Biot und Savart. — Wenden das Prinzip der Äquivalenz auf einige von speziellen Stromsystemen orgebrachte Felder an.

Schliesst eine geschlossene Strombahn eine sehr grosse Fläche ein, ist einer ihrer Teile geradlinig, so man in den nahe der Mitte dieses s gelegenen Punkten die Wir- en der anderen Teile vernach- gen; somit stellt uns dieser prak- e Fall den ideellen Grenzfall geradlinigen, sich im Unendlichen essenden, eine unendlich grosse ie begrenzenden Stromkreises dar. Betrachten wir (Fig. 107) einen llinigen, in bezug auf die Figurebene von vorn nach hinten ge- eten Strom i. Das einfache magnetische Blatt mit der Potenz $\mathfrak{P} = i$,

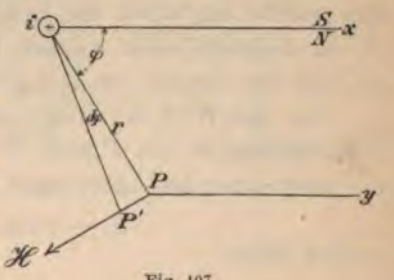


Fig. 107.

Betrachten wir einen Punkt P inner… von der Gerade… nahe bei P zwei äussere Punkte P' und … bis ins Unendli… gelegen, und berechnen wir die Kräfte, … Nordseite nach un… ausübt. Der Punkt P befindet sich in der … der sich in einem unendlich dünnen, … von i gelegenen P… befindet: die Kraft hat in P eine der … denselben Wert, gl… Richtung und den Wert … Die Beziehung (…

$$\mathfrak{K} = 4\pi\sigma$$

In den Punkten P' und P'' g… positiv, weil von … Richtung der Magnetisierung besitzen … durch das auf der Kugel… welche auf die Einheitsmasse wirkt … parallelen Ebene Py … Seite eines magnetischen Blattes … Winkel $\widehat{Pix}$, so ist de… weise Änderung erfährt, welche auf … grössten Kugelkreise bil…

Betrachten wir dagegen die von … $-\varphi$, magnetischen Kräfte. In den Punkten … fällt die vom Strome mit der von … 2π, wie ω zum Flächen… aber im Punkte P findet diese … Flächeninhalt des Zweiec… Falle des Stromes ist der Punkt … $-\varphi$); und P'' durch keine singuläre … sehen von einer Konstant… in P, abgesehen von unendlich … $-\varphi$). und P''. Wir können uns dar…

Uns daran erinnernd, dass … $-\frac{dV}{ds}$ gestattet uns, aus d… Blatt eine beliebige Form besitzt … Kraft im Punkte P leicht … dem Stromkreise zusammenfällt … der einzigen Veränderlich… nach der Fläche ACB (Fig. … und folglich ist die K… selbe auf die drei äusseren, … liegenden Richtung gl… P', P und P'' ausübt, sind … Ebene iP. Wir find… gleich; folglich sind auch die … bei unserem Studium au…

Man hat also zwischen … ung bewiesen wird. Di… schied, dass, während im … ab- und φ zunimmt, di… Blattes selbst singuläre Fl… re und Maxwell angegeb… des elektrischen Stromes … berechnen, erteilen wir … aussen mit den vom Blatt … in der Richtung $P\mathfrak{K}$; … und innen die Fortsetzun… von φ und V. Man hat …

Der Stromkreis un… $dV = -2i\,d\varphi$, kettet, d. h. man kann … linien oder den Stromk… $-\frac{dV}{ds} = \frac{2i\,d\varphi}{r\,d\varphi}$

Man kann indessen … $\mathfrak{K} = \frac{2i}{r}$. tismus giebt, welche … bringt, und zwar desh…

Die Intensität des von einem geradlinigen Strome hervorgerufenen Feldes ist der Stromstärke direkt, dem Abstande des betrachteten Punktes vom Strome umgekehrt proportional.

Im Felde eines geradlinigen Stromes sind also die Kraftlinien Kreise, die auf dem Leiter ihre Mittelpunkte haben und in Ebenen liegen, die zu demselben senkrecht sind; die Kraft hat längs jedes Kreises konstanten Wert.

Dieses von uns als eine Folge des Prinzips der Äquivalenz ermittelte Gesetz wurde auf experimentellem Wege von Biot und Savart bestimmt und ist sogar eines der Gesetze, welche die Erfahrung mit der grössten Strenge als richtig nachweist. Es bestätigt das Prinzip, von welchem wir ausgegangen sind, und diente eben Ampère als Ausgangspunkt zur Festsetzung seiner Theorie des Elektromagnetismus und zur Ableitung des Prinzips der Äquivalenz.

Ohne uns mit der vollständigen, experimentellen Kontrole dieses Gesetzes zu beschäftigen, wollen wir doch einen einfachen Versuch erwähnen, welcher beweist, dass die Kraft mit der Entfernung umgekehrt proportional variiert.

Ein geradliniger, sehr langer und vertikal angeordneter Leiter ii (Fig. 108) trägt durch Fäden eine leichte, um die Achse ii frei drehbare Scheibe AB. Man lege auf die Scheibe einen Magneten NS in die Richtung des erdmagnetischen Feldes, sodass die Richtwirkung des letzteren die Aufhängefäden nicht dreht, und balanziere die Scheibe durch ein Gegengewicht G aus. Wenn man nun einen Strom durch den Leiter ii schickt, so nimmt man keine Bewegung wahr. Dies beweist, dass die Summe der Momente in bezug auf die Achse ii der auf den Magneten wirkenden Kräfte Null ist; sind m und $-m$ die entgegengesetzt gleichen magnetischen Massen, die in den beiden Polen konzentriert sind, $\mathscr{H}$ und $\mathscr{H}'$ die Feldstärke in denselben, r und r' ihre Entfernungen von der Achse ii, so hat man:

$$m\mathscr{H}r - m\mathscr{H}'r' = 0$$

woraus folgt:

$$\frac{\mathscr{H}}{\mathscr{H}'} = \frac{r'}{r},$$

was zu beweisen war.

Fig. 108.

97. Zylindrisches, geradliniges Solenoid. — Betrachten wir ein zylindrisches Solenoid mit geradliniger Achse, welches praktisch durch

eine zylindrische Spirale mit sehr kleiner Ganghöhe hergestellt werd kann, deren Windungen gleichmässig auf der Zylinderoberfläche verte sind. Es sei $ABCD$ (Fig. 109) die Projektion des Zylinders, XX c Achse des Solenoids, n die Zahl der auf die Längeneinheit in d Richtung der Achse kommenden Windungen. Jede Windung ist eine magnetischen Blatte mit der Potenz $\mathfrak{M} = i$ äquivalent, welches von d Windung begrenzt ist, und welches wir uns eben, mit der Dicke $\lambda =$ vorstellen können, derart, dass jedes Blatt das benachbarte in all Punkten berührt.

Die Magnetisierung hat in jedem Punkte den konstanten Wert

$$J = \frac{\mathfrak{M}}{\lambda} = ni \tag{4}$$

und ist parallel zur Achse XX. Die Gesamtheit dieser Blätter, welch das Solenoid äquivalent ist, bildet einen zylindrischen, gleichförmig Magneten $ABCD$, und die Massen von freiem Magnetismus reduzier sich auf zwei entgegengesetzt gleiche, auf den Endseiten AB und C verteilte Massen von der Dichte $\sigma = J$.

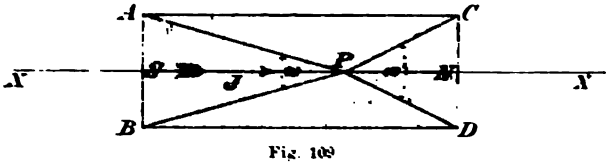


Fig. 109

Berechnen wir das magnetische Moment dieses Systemes. Wenn den Querschnitt und l die Länge des Zylinders bezeichnet, so ist Menge von Magnetismus, die auf jeder der Grundflächen verteilt ist:

$$m = \sigma a = ani,$$

und daher das magnetische Moment:

$$\mathfrak{A} = lani,$$

oder ferner, wenn N die Gesamtzahl nl der Windungen bedeutet:

$$\mathfrak{A} = Nai.$$

Dem Produkte Na, welches die Summe der Flächen sämtlicl Windungen darstellt, giebt man den Namen *Gesamtflächeninhalt* Spirale oder *des Solenoids*; bezeichnet man denselben mit S, so hat m zum Schlusse:

$$\mathfrak{A} = Si.$$

Das magnetische Moment des einem Solenoid äquivalenten Magneten i gleich dem Produkte aus der Stromstärke und dem Gesamtflächeninhalte d Solenoids.

durch, dass wir uns des äquivalenten, gleichförmigen Magneten
, ist es uns leicht, das vom Solenoid erzeugte Feld zu untersuchen.
einen äusseren Punkt ist die vom Solenoid erzeugte Kraft der vom
migen Magneten herrührenden gleich. Dieselbe kann mittels der
b'schen Formel ausgerechnet werden, indem man beachtet, dass
sen von freiem Magnetismus sich auf die beiden auf den Grund-
AB und CD verteilten Massen reduzieren, oder auch einfacher
as eben ermittelte magnetische Moment.
einen inneren Punkt hat man dagegen Gleichheit zwischen der
ome erzeugten Kraft und der vom Magneten herrührenden In-

rachten wir einen im Innern des Magneten und, der Einfachheit
auf der Achse XX gelegenen Punkt P, und bezeichnen wir mit $\mathfrak{H}$
ke des vom Strome herrührenden Feldes, mit $\mathfrak{H}_m$ und $\mathfrak{B}_m$ die
er Kraft bezw. der Induktion, die vom Magneten herrühren.
il der betrachtete Punkt auf der Achse liegt, sind $\mathfrak{B}_m$, $\mathfrak{H}_m$ und
Symmetrie wegen parallel zur Achse XX, und es besteht die
ng:

$$\mathfrak{B}_m = \mathfrak{H}_m + 4\pi J.$$

Kraft $\mathfrak{H}_m$, welche von den beiden auf den Grundflächen gleich-
mit der Dichte $\sigma = J$ verteilten Massen hervorgebracht wird, hat
rt [79]:

$$\mathfrak{H}_m = J(\omega + \omega'),$$

und ω' die scheinbaren Flächen der beiden Seiten, vom Punkte
gesehen, sind. Ferner ist die Kraft $\mathfrak{H}_m$ der Magnetisierung J
gerichtet und muss also als negativ angesehen werden; man
:

$$\mathfrak{B}_m = 4\pi J - J(\omega + \omega') = ni(4\pi - \omega - \omega')$$

h dem Prinzip der Äquivalenz:

$$\mathfrak{H} = ni(4\pi - \omega - \omega').$$

Kraft $\mathfrak{H}$, welche immer positiv ist, weil $4\pi > \omega + \omega'$ ist, variiert
nkt zu Punkt; in den einer der Grundflächen nahe gelegenen
können ω und ω' ihren grössten Wert 2π erreichen; in den
n den Grundflächen entfernten Punkten haben ω und ω' sehr
Verte. Betrachtet man einen Zylinder, dessen Länge im Vergleich
Durchmesser seiner Basis sehr gross ist, und wählt man den
P etwa in der Mitte der Achse, dann kann man ω und ω' ver-
igen und näherungsweise annehmen:

$$\mathfrak{H} = 4\pi ni.$$

Wenn ω und ω' vernachlässigt werden können, dann wird die Kraft $\mathscr{H}$ auch für nicht auf der Achse liegende Punkte noch durch die Formel (7) gegeben; daher kann man im Innern eines sehr langen Solenoids in dem von den Enden weit genug entfernten Teile das Vorhandensein eines gleichförmigen Feldes annehmen. Betrachtet man dagegen das Feld in der Nähe der Enden, so variiert die Feldstärke nicht nur von Punkt zu Punkt eines und desselben Schnittes, sondern auch für verschiedene Punkte der Achse. Für einen unendlich nahe einem Ende auf der Achse gelegenen Punkt ist $\omega = 2\pi$ und $\omega' = 0$, folglich $\mathscr{H} = 2\pi ni$; die Kraft hat in der Nähe der Enden des Solenoids die Hälfte des Wertes, den sie in der Mitte besitzt.

Wenn man, anstatt eines geradlinigen, ein Solenoid mit kreisförmiger Achse betrachtet, hat der äquivalente Magnet eine Form, die man sich dadurch hergestellt denken kann, dass man einen gleichförmigen Magneten gebogen und dessen Grundflächen miteinander verbunden hat: da so die Verteilung von freiem Magnetismus auf den Grundflächen nicht mehr vorhanden ist, verlaufen alle Kraftlinien im Innern des Solenoids und fallen mit den Induktionslinien des Magneten zusammen; die Kraft hat in jedem Punkte den konstanten Wert:

$$\mathscr{H} = 4\pi J = 4\pi ni.$$

Bei der Anwendung des Prinzips der Äquivalenz kann man, anstatt der Gleichheit zwischen der vom Strome herrührenden Kraft und der vom äquivalenten Magneten erzeugten Induktion, die Gleichheit zwischen Kraft und Kraft in beiden Feldern betrachten; es ist dazu nötig, den Magneten so anzuordnen, dass der betrachtete Punkt ausserhalb desselben liegt. Im Falle des Solenoids z. B. kann man die Lamellen um einen äusserst geringen Betrag verschieben, sodass der Punkt P sich in der Luft befindet. Dann liegt derselbe in einem unendlich dünnen, im Magneten hergestellten Schlitz, und die auf ihn wirkende Kraft ist eben das, was wir elektromagnetisch definierte Kraft genannt haben, oder, wenn man nur die numerischen Werte ins Auge fasst, die magnetische Induktion. Die beiden Arten, die Sache zu betrachten, sind daher vollständig übereinstimmend.

Begnügen wir uns vorläufig mit der Erkenntnis, dass ein Solenoid uns ein leichtes Mittel an die Hand giebt, in einem gegebenen Raume ein praktisch gleichförmiges Feld zu erzielen, welches bekannte Werte besitzt, wenn die Werte, welche die Stromstärke i annimmt, bekannt sind. Das von einem Solenoid erzeugte Feld kann also bei der Betrachtung der zur Bestimmung der magnetischen Eigenschaften des Eisens und der ihm verwandten Körper [84] angestellten Versuche mit Nutzen

ngezogen werden. Wir müssen jedoch in dieser Hinsicht eine wichtige erkung machen.

Ein in das Innere des Solenoids gesetzter Eisenkern magnetisiert durch Influenz des vom Strome erzeugten Feldes, und es treten auf Massen von freiem Magnetismus zu Tage, welche ihrerseits magsche Kräfte hervorrufen. Die Kraft in einem beliebigen im Innern Solenoids gelegenen Punkte ist daher nicht mehr allein die vom noid herrührende Kraft $\mathscr{H}$, sondern die Resultierende aus der Kraft und aus der von den Massen des freien Magnetismus auf dem Eisen- erzeugten Kraft. Letztere ist immer eine entmagnetisierende [87] t, der Kraft $\mathscr{H}$ entgegengerichtet; ihr Wert ist um so grösser, je ser der Durchmesser im Vergleich zu der Länge des Zylinders sie kann jedoch nicht genau berechnet werden, wenn die Dichte des n Magnetismus, d. h. die Intensität der Magnetisierung nicht bekannt sie ist also unbestimmbar, wenn man die Eigenschaften des hineinachten Eisenkernes nicht kennt.

Praktisch beugt man diesem Übelstand vor, indem man diese Kraft Null oder so klein macht, dass man sie ohne merklichen Fehler verlässigen kann. Ewing verwendet dafür kleine Stäbchen, deren Länge bis 400mal so gross wie ihr Durchmesser ist, Hopkinson und Andere len ringförmig gebogene Stäbe oder allgemein geschlossene magnee Kreise, in welchen keine Massen von freiem Magnetismus vorden sind.

Durch diese Anordnungen gewinnt man ein Feld, das man noch als hförmig ansehen kann, und dessen Stärke

$$\mathscr{H} = 4\pi n i$$

98. Verteilung des magnetischen Poten-. — In den von Strömen hervorgerufenen ern ist das magnetische Potential eine drome Funktion, und keine monodrome, bei Feldern, die einfach von magnetischen rton'schen Massen herrühren.

Betrachten wir einen Strom i in einem se AB (Fig. 110), den wir der Einfachhalber als in einer Ebene liegend voraus-n, und das äquivalente, ebene magnetische t. P sei ein Punkt im Innern des Blattes, nd P'' zwei in unmittelbarer Nähe des tes je an einer Seite desselben ausserhalb gene Punkte.

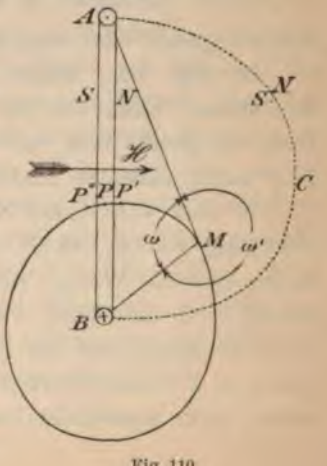


Fig. 110.

Ausserhalb des Blattes ist die Beschaffenheit des vom Blatte und des vom Strome herrührenden Feldes gleich. Daher hat das Potential in beiden Fällen, abgesehen von einer Konstanten in dem unendlich nahe der Nordseite gelegenen Punkte P', den Wert

$$V' = 2\pi\mathfrak{P} = 2\pi i$$

und in dem unendlich nahe an der Südseite gelegenen Punkte P'' den Wert

$$V'' = -2\pi\mathfrak{P} = -2\pi i.$$

Verschiebt man die magnetische Einheitsmasse vom Punkte P' zum Punkte P'' längs einer durch das Blatt nicht hindurchgehenden Linie $P'MP''$, so leisten die Feldkräfte eine positive Arbeit

$$V' - V'' = 2\pi i - (-2\pi i) = 4\pi i.$$

Wenn man nun aber andererseits die Masse *Eins* längs eines unendlich dünnen, im Blatte selbst hergestellten Kanals von P'' nach P' zurückkehren lässt, so leisten die Feldkräfte, weil die Kraft im Inneren der Bewegung entgegengerichtet ist, eine negative Arbeit, d. h. äussere Kräfte müssen die Arbeit verrichten, und folglich steigt das Potential von P'' nach P'. Die Kraft im Innern des Blattes hat den konstanten Wert

$$4\pi J = 4\pi \frac{i}{\lambda};$$

der Abstand zwischen den Punkten P'' und P' ist λ, folglich ist die Arbeit, während die Einheitsmasse durch den Kanal von P'' nach P' übergeht, auch

$$4\pi \frac{i}{\lambda} \lambda = 4\pi i.$$

Nach dem Durchlaufen der Kreisbahn und der Rückkehr nach P' hat man ein Potential

$$V_1' = V'' + 4\pi i = -2\pi i + 4\pi i = 2\pi i = V',$$

welches gleich dem ursprünglichen ist.

In dem vom Blatte erzeugten Felde ist also das Potential eine monodrome Funktion; die Arbeit längs einer beliebigen geschlossenen Linie ist gleich Null, wie es auch notwendigerweise sein muss, weil das Feld durch statische Zustände bedingt ist.

In dem von einem Strome erzeugten Felde dagegen wird bei dem Übergang von P'' zu P' eine unendlich kleine Arbeit verrichtet, da die Kraft endliche Werte, welche stetig zwischen diesen Punkten variieren, besitzt und auf einen unendlich kleinen Raum wirkt. Deshalb findet man, nachdem man die geschlossene Linie durchlaufen hat, bei der Ankunft in P' einen Wert des Potentials, welcher von dem, den man in P'' hatte, nicht verschieden ist, nämlich:

$$V_1' = V'' = -2\pi i.$$

In dem vom Strome erzeugten Felde wird also, während die bewegliche Einheitsmasse eine geschlossene, die Stromfläche durchschneidende Linie durchläuft, eine positive Arbeit

$$V' - V_1' = 4\pi i$$

geleistet.

Dies ist in diesem Felde möglich, weil die Arbeit auf Kosten der vom Strome gelieferten Energie verrichtet wird. Kehrt man von P' längs einer mit der Strombahn verschlungenen Linie nach P' zurück, so sinkt der Wert des Potentials um $4\pi i$ nach jeder Umkreisung; das Potential in P' kann beliebig viele Werte annehmen, welche von einander um $4\pi i$ differieren.

In einem beliebigen Punkte M, von welchem aus die Nordseite von AB unter dem räumlichen Winkel ω gesehen wird, hat das vom Blatte hervorgebrachte Potential den Wert

$$v = \omega i + \text{Konst};$$

dagegen kann das vom Strome hervorgerufene Potential unendlich viele Werte annehmen, die man in den allgemeinen Ausdruck zusammenfassen kann:

$$V = \omega i \mp 4\pi N i + \text{Konst}, \tag{8}$$

worin N angiebt, wie oft der Punkt beim Durchlaufen der Linie den Stromkreis umkreist; man hat dabei das Vorzeichen $+$ oder $-$ zu wählen, je nachdem die Linie in der Richtung der Kraft oder in der entgegengesetzten durchlaufen wird, d. h. je nachdem die geleistete Arbeit positiv oder negativ ist.

Zu demselben Ausdrucke können wir auch durch eine etwas andere Überlegung gelangen.

Wir stellen uns vor, dass wir, vom Punkte M ausgehend, in dem das Potential den Wert $\omega i +$ Konst. besitzt, eine geschlossene, mit dem Strome verschlungene Linie durchlaufen; da die Form und die Lage des Blattes willkürlich sind, werden wir immer bewirken können, dass das Blatt bei dieser Bewegung nicht durchsetzt wird; es genügt, anzunehmen, dass sich das Blatt, wenn wir in die Nähe von P'' gelangt sind, deformiert, als wäre es von dem beweglichen Punkte vorwärts geschoben. Dadurch wird das Blatt, wenn man nach M zurückgekehrt ist, eine Lage eingenommen haben, die durch die Punkte ACB bestimmt ist. Jetzt sieht man vom Punkte M aus nicht mehr die Nordseite, sondern die Südseite unter dem Winkel $\omega' = 4\pi - \omega$, und folglich hat das Potential nicht mehr den Wert $\omega i +$ Konst, sondern einen neuen Wert:

$$-(4\pi - \omega)\, i + \text{Konst} = (\omega - 4\pi)\, i + \text{Konst},$$

was wir beweisen wollten.

Das von einem Strome hervorgerufene Feld ist ein *zyklischer Raum*, d. h. ein Feld, in welchem das Potential eine polydrome Funktion ist: die Konstante $4\pi i$ heisst die *zyklische Konstante*. Betrachtet man geschlossene, mit dem Strome nicht verschlungene Linien, so ist die längs einer derselben verrichtete Arbeit gleich Null; man kann also den Raum *azyklisch* machen, indem man eine beliebige mit der Begrenzung AB versehene Fläche festlegt und die Bedingung stellt, dass dieselbe nie durchsetzt werden dürfe; nur dann hat man es in diesem Falle mit einem monodromen Potential zu thun.

99. Verteilung des Potentials im Felde eines geradlinigen Stromes. — In dem Falle einer geradlinigen Strombahn können die bezüglich der Verteilung der Potentiale bewiesenen Eigentümlichkeiten direkt aus dem Gesetze von Biot und Savart abgeleitet werden.

A sei ein beliebiger, im Felde des Stromes i gelegener Punkt; da die Kraft $\mathfrak{H} = \frac{2i}{r}$ senkrecht zur Ebene Ai ist, so ist die Arbeit, wie man auch immer eine magnetische Masse in dieser Ebene bewegt, gleich Null. Wenn man dagegen von der Ebene Ai zu einer anderen mit der ersten einen Winkel α bildenden Ebene Bi längs des Kreisbogens vom Radius $Ai = r$ übergeht, so ist die geleistete Arbeit:

$$W = \frac{2i}{r}\,\alpha r = 2\alpha i.$$

Diese Arbeit ist unabhängig von der Entfernung des Punktes von der Strombahn und hängt ausschliesslich vom Winkel α ab.

Man nehme nun an, die Masse *Eins* gehe vom Punkte A längs einer beliebigen, ebenen oder krummen Linie zum Punkte B über (Fig. 111), und lege durch den Leiter i eine Schar von Ebenen, welche die Linie in Punkten schneiden, deren Projektionen auf die Figurebene mit $M, N, P, \cdots$ bezeichnet werden. In einer zum Leiter i senkrechten Ebene schlage man einen Kreisbogen mit dem Radius iA, dessen Zentrum sich im Leiter i befinde; die Projektion des Schnittpunktes, in welchem dieser Kreisbogen die Ebene iM trifft, auf die Normalebene zu i heisse m; in analoger Weise schlage man einen Kreisbogen um den Leiter i mit dem Radius iM; die Projektion des Schnittpunktes, in welchem dieser Kreisbogen die Ebene iM trifft, auf die Normalebene heisse n; dasselbe führe man in analoger

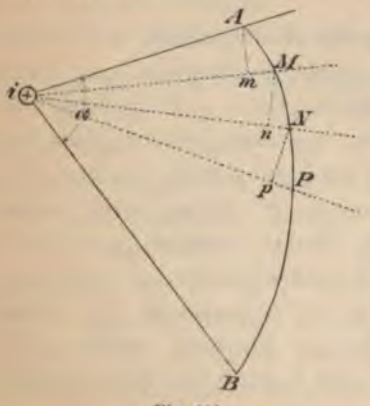


Fig. 111.

Weise für alle weiteren Punkte der Linie AB aus. Man verbinde M mit m, N mit n ··· durch beliebige in den Ebenen iM, iN, ··· liegende Linien, deren Projektionen in der Figurenebene die Strecken Mm, Nn, ··· sind.

Denkt man sich, dass die Anzahl der durch i gelegten Ebenen unendlich wächst, so hat man eine Polygonallinie mit unendlich kleinen Seiten, deren Grenzwert die gegebene Linie AB ist. Die von den Kräften des Feldes darauf verwendete Arbeit, die magnetische Einheitsmasse längs der Linie AB fortzubewegen, ist der Grenzwert, nach welchem die von denselben Kräften zur Bewegung der Masse längs der Polygonallinie verrichtete Arbeit strebt. Nun sind alle längs der Strecken mM, nN, ··· geleistete Arbeiten Null, und die Arbeit beschränkt sich auf die Summe der den Kreisbögen Am, Mn, ··· entsprechenden Arbeiten. Längs eines beliebigen dieser Kreisbögen, welcher einem Winkel $d\alpha$ entspricht, ist die Arbeit $2id\alpha$, und folglich ist die gesamte Arbeit:

$$2i\alpha,$$

worin α der von den beiden Ebenen iA und iB gebildete Flächenwinkel ist.

Die geleistete Arbeit ist unabhängig von der durchlaufenen Linie, sie hängt nur von dem Winkel α ab, welcher von den durch i und die Endpunkte der Linie gelegten Ebenen gebildet wird. In diesem Felde besitzen also die Kräfte ein Potential, welches aber nicht monodrom ist, weil der Winkel α und folglich die geleistete Arbeit unendlich viele Werte haben kann, je nach der Zahl der Umwindungen der betrachteten Linie um die Strombahn i. Die verschiedenen Werte von α differieren von einander um 2π, und folglich diejenigen der Arbeit und des Potentials um $4\pi i$. Man muss infolgedessen in dem allgemeinen Ausdrucke (3) des Potentials im Felde eines geradlinigen Stromes

$$V = 2i(\pi - \varphi)$$

unter φ einen beliebigen der Winkel verstehen, die man erhält, wenn man ein ganzes Vielfaches von 2π zu φ addiert oder von φ subtrahiert.

100. Allgemeine Beziehung zwischen der elektrischen Verschiebung und dem erzeugten magnetischen Felde. — Die im vorigen Abschnitte erhaltenen Ergebnisse können in eine etwas andere Form gebracht werden.

Im Felde des Stromes betrachte man eine beliebige geschlossene Linie l; bezeichnet dl ein Linienelement und $\mathfrak{H}_l$ die Tangentialkomponente der magnetischen Kraft, dann ist $\mathfrak{H}_l dl$ die Arbeit für die Verschiebung der Einheitsmasse längs dieses Elementes, und folglich $\int \mathfrak{H}_l dl$ die Arbeit längs der ganzen Linie. Wenn die betrachtete Linie

mit dem Strome einfach verschlungen ist und Nmal durchlaufen wird, so ist die verrichtete Arbeit $4\pi Ni$, und daher hat man:

$$\int \mathfrak{H}_i dl = 4\pi Ni.$$

Fig. 112.

Derselbe Ausdruck der Arbeit wird erhalten, wenn man die Einheitsmasse ein einziges mal um eine geschlossene, mit dem Strome Nmal verschlungene Linie herumführt (Fig. 112), und also auch, wenn die Einheitsmasse einmal um eine geschlossene Linie herumgeht, welche eine aus N Windungen bestehende Stromspirale durchsetzt, weil die Arbeit unabhängig von der Form der Linie und der Strombahn ist und ausschliesslich davon abhängt, wie viel mal die Linie die Strombahn umschlingt.

Diese Beziehung kann ohne weiteres auf den Fall ausgedehnt werden, in welchem das Feld von einem System von Strömen hervorgebracht wird; die gesamte Arbeit ist die Summe der von den einzelnen Strömen herrührenden Arbeiten, und folglich:

$$\int \mathfrak{H}_i dl = 4\pi \sum Ni. \tag{9}$$

In jedem Posten der Summe giebt N an, wie vielfach die Linie und der Strom verschlungen sind, weil es, wie gesagt, ganz gleichgiltig ist, ob die Linie die Stromfläche Nmal durchschneidet, oder ob der Stromkreis die von der Linie eingeschlossene Fläche Nmal durchsetzt; man wird ferner N mit positivem oder negativem Vorzeichen annehmen, je nachdem die Einheitsmasse längs der Linie sich um den Stromkreis in der Richtung des von diesem erzeugten Feldes oder in der entgegengesetzten bewegt.

In einem Gleichstromkreise findet eine konstante elektrische Verschiebung statt, die Stromstärke ist der genaue Ausdruck für die Änderung der Verschiebung in der Zeiteinheit. Indessen stellt die Summe $\sum Ni$ die gesamte elektrische Verschiebung dar, die in der Zeiteinheit in der geschlossenen, betrachteten Linie stattfindet; die Formel (9) giebt die Beziehung dieser Verschiebung zu dem Linienintegral der von der Verschiebung selbst erzeugten magnetischen Kraft und bildet folglich die allgemeine Lösung des ersten Problems, das wir uns auf dem Gebiete des Elektromagnetismus vorgelegt haben.

101. Einfluss der freien magnetischen Massen und der Beschaffenheit der Materialien des Feldes. — Bei den im vorigen Abschnitte entwickelten

etrachtungen ist stillschweigend vorausgesetzt worden, dass die Linie l ı der Luft gezogen wäre, und dass in dem vom Strome hervorgebrachten elde keine freien magnetischen Massen vorhanden wären. Behandeln ir nun den allgemeinen Fall: im Felde des Stromes befinden sich freie ıagnetische Massen, welche entweder auf Eisenstücken, die durch die ıduktive Wirkung des Stromes magnetisiert worden sind, oder auf ·sprünglichen Magneten verteilt sind; die Linie l liege beliebig in dem ›n Luft oder von magnetischem Material eingenommenen Raume.

In jedem Punkte des Feldes ist die Kraft $\mathfrak{H}$ die Resultierende aus r vom Strome hervorgebrachten Kraft $\mathfrak{H}'$, die, wie vorher angegeben, rechnet wird, und der von den Massen von freiem Magnetismus herhrenden Kraft $\mathfrak{H}''$, welche durch die Coulomb'sche Formel, wenn die rteilung der Massen bekannt ist, berechnet werden kann. Man hat in dem Punkte der Linie $\mathfrak{H}_l = \mathfrak{H}_l' + \mathfrak{H}_l''$, folglich ist die geleistete rbeit, während die Einheitsmasse die Linie durchläuft:

$$\int \mathfrak{H}_l dl = \int \mathfrak{H}_l' dl + \int \mathfrak{H}_l'' dl.$$

Nun ist nach der Formel (9):

$$\int \mathfrak{H}_l' dl = 4\pi \sum Ni$$

ıd ferner, welche Gestalt die Linie l auch besitze:

$$\int \mathfrak{H}_l'' dl = 0,$$

ril das längs einer geschlossenen Linie gebildete Integral einer Kraft, lche von Newton'schen, immer ein monodromes Potential besitzenden ıssen herrührt, stets gleich Null ist.

Es besteht folglich noch die Beziehung:

$$\int \mathfrak{H}_l dl = 4\pi \sum Ni.$$

Das Integral der magnetischen Kraft längs einer beliebigen gelossenen Linie hängt ausschliesslich von der Stärke der Ströme und von ab, wie oft die Linie mit den Strombahnen verkettet ist, und ist nz unabhängig von der Natur der durchdrungenen Materialien und von r Verteilung der freien magnetischen Massen im Felde.

Ist die geschlossene Linie mit keinem Stromkreise verkettet, so ist s Integral der Kraft längs derselben gleich Null, welches auch die Verlung des Feldes sei; und umgekehrt, ist das Integral der magnetischen aft längs einer geschlossenen Linie nicht gleich Null, dann durchsetzt se Linie sicher irgend eine Stromfläche. Diese Eigenschaft könnte gar zur Definition des Stromes dienen: durch einen gegebenen Stromeis fliesst ein Strom, wenn das Integral der magnetischen Kraft längs ıer beliebigen mit ihm verketteten Linie nicht Null ist. Auf diese

Weise wäre der Strom durch seine magnetischen Wirkungen, auf welchen viele der praktischen Messmethoden beruhen, definiert.

Es ist wichtig, schon jetzt zu bemerken, dass der elektrische Strom eine Erscheinung ist, welche ihren Sitz nicht nur im Innern eines Leiters hat, sondern sich auf den ganzen umgebenden Raum erstreckt; dieser befindet sich in besonderen Zuständen und ist der Sitz eines magnetischen Feldes, in welchem das Integral der Kraft längs einer geschlossenen Linie nicht Null ist.

Daraus, dass eine beliebige Veränderung der Körper, welche sich in dem von einem Strome erzeugten Felde befinden, keine Veränderung des Integrals der Kraft längs einer beliebigen geschlossenen Linie zur Folge hat, darf man jedoch nicht schliessen, dass das ganze Feld unverändert bleibt.

Vor allem variiert das Integral der magnetischen Induktion mit der Natur der durchsetzten Medien. In der That, wenn μ den Wert der magnetischen Permeabilität in einem beliebigen Punkte der Linie bezeichnet, entsprechend dem Zustande, in welchem sich jenes Material befindet, so gilt für jeden Punkt die Bezeichnung: $\mathfrak{B}_i = \mu \mathfrak{H}_i$, und durch Einsetzung dieses Wertes in die Formel (9) erhält man:

$$\int \frac{\mathfrak{B}_i}{\mu} dl = 4\pi \sum Ni.$$

Verläuft die Linie ganz in demselben Material, dann hat μ längs der ganzen Linie konstanten Wert, und es wird:

$$\int \mathfrak{B}_i dl = 4\pi\mu \sum Ni.$$

Das Integral der magnetischen Induktion längs einer beliebigen geschlossenen Linie hängt von der Permeabilität der durchsetzten Medien ab und ist proportional derselben, wenn ein einziges Medium durchsetzt wird.

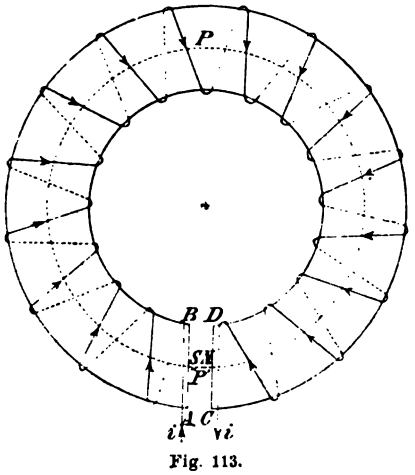


Fig. 113.

Auch die Kraft und das Integral der Kraft längs einer offenen Linie variieren mit der Natur der Substanz. Man denke sich einen magnetischen Kreis, der grösstenteils aus Eisen und etwas Luft besteht. Es sei z. B. (Fig. 113) auf einen Eisenring, aus welchem die magnetische Substanz zwischen zwei einander nahen Schnitten AB und CD entfernt worden ist, eine gleichförmige, vom Strome durch-

flossene Spirale gewickelt. Dieser magnetische Kreis bildet eine Induktionsröhre, längs welcher der Induktionsfluss konstant ist; die Induktionslinien sind Kreise, welche ihr Zentrum auf der Achse des Ringes haben.

Man betrachte eine beliebige dieser Induktionslinien und unterscheide die beiden Teile, den Teil SPN im Eisen und den Teil $NP'S$ in der Luft. Für das Eisen hat man $\mathscr{H} = \frac{\mathscr{B}}{\mu}$ und für die Luft $\mathscr{H} = \mathscr{B}$, folglich ist das Integral der Kraft längs dieser Linie:

$$\int \mathscr{H} dl = \frac{1}{\mu} \int_{SPN} \mathscr{B} dl + \int_{NP'S} \mathscr{B} dl = 4\pi N i.$$

Setzt man die Induktion $\mathscr{B}$ konstant voraus, und bezeichnet man mit l die Länge des Linienstückes SPN im Eisen, mit d diejenige des Stückes $NP'S$ in der Luft, so hat man:

$$\frac{\mathscr{B}}{\mu} l + \mathscr{B} d = 4\pi N i,$$

woraus folgt:

$$\mathscr{B} = \frac{4\pi N i}{\frac{l}{\mu} + d},$$

und, da in der Luft $\mathscr{H}$ und $\mathscr{B}$ denselben Wert besitzen:

$$\mathscr{H} = \frac{4\pi N i}{\frac{l}{\mu} + d}.$$

Diese Beziehungen beweisen, dass die Werte der Kraft $\mathscr{H}$ und deren Integral längs einer nicht geschlossenen Linie von der Permeabilität des Mediums abhängen. Es ist zwar das Integral der Kraft längs einer geschlossenen Linie konstant, aber die Verteilung dieser Kraft längs der Linie variiert mit der Natur der Materialien.

Wenn der Ring aus einem einzigen Material bestände, so hätte die Kraft längs der Linie konstanten Wert; da der Ring dagegen aus verschiedenen Materialien gebildet ist, so ist die Kraft kleiner in dem Medium, welches grössere Permeabilität besitzt, und grösser in der Luft. Wenn man μ sehr gross und d sehr klein macht, so kann die Kraft $\mathscr{H}$ in der Luft sehr grosse Werte erreichen.

Man bezeichne mit Φ, $\mathscr{B}$ und S bezw. den Wert des Flusses, der Induktion und des Querschnittes in dem eben betrachteten Eisenring, Werte, die man als konstant annehmen kann. Es ist dann:

$$\Phi = \mathscr{B} S = S \frac{4\pi N i}{\frac{l}{\mu} + d}.$$

Stärke des magne-
mit dem mag-
der Permeabilität

Art Gebrauch, um
magnetischen Kraft
die fast vollständig
den Windungen ge-
Zwischenräumen bestehen.
unterbrochenen Ringes, an
austreten, tritt eine Ver-
Endseiten werden deshalb
genannt.

Analogie mit dem Ohm'
schen Prinzipien. Man betrachte einen
magnetischen Kreis, in welchem der
werden kann, sodass er
der Wert des Flusses be-
die Materialien, woraus
Schnitt dessen Flächen-

Wert der magnetischen Induktion
Schnittes zu betrachten:
Schnitte einen solchen Mittel-

wenn er in allen Punkten des

würde, der dem wirklich
Schnitt der Röhre können die
des auf einer Induktionslinie
gemessenen Abstandes l ausgedrückt
die Beziehungen:

$$\mathfrak{H} = \frac{\Phi}{\mu S},$$

Induktionslinie angewandte

(11) $$\mathfrak{R} = \int \frac{dl}{\mu S}$$

gesetzt hat.

Wenn man die magnetische Verschiebung mit der elektrischen, die Grösse $4\pi Ni$ mit der E. M. K. und $\mathfrak{R}$ mit dem Widerstand r vergleicht, so findet man eine beachtenswerte Analogie obiger Beziehungen mit denjenigen, welche für einen vollständigen elektrischen Stromkreis das Ohm'sche Gesetz ausdrücken $\left(ri = e, \quad r = \int \frac{ds}{cS}\right)$. Die Grösse $4\pi Ni$ kann der Analogie wegen *magnetomotorische Kraft* genannt werden. Durch diese Benennung haben wir schon [81] eine Grösse von derselben Natur wie die magnetischen Kräfte bezeichnet; jetzt dagegen bezeichnen wir damit eine Grösse, welche, wie aus der Formel (9) ersichtlich, ein Linienintegral der magnetischen Kraft, d. h. eine Grösse von der Natur der Potentiale ist; genau so, wie man in der Lehre von der Elektrizität den Namen E. M. K. zwei Grössen erteilt, von denen eine eine wirkliche Kraft darstellt, während die andere die Natur der Potentiale besitzt.

Die Grösse $\mathfrak{R}$ wird *magnetischer Widerstand*, oder, wie es von O. Heaviside vorgeschlagen wurde, *Reluktanz des magnetischen Stromkreises* genannt. Die Formel (11), welche den Zusammenhang derselben mit der Länge und dem Querschnitte des magnetischen Kreises angiebt, ist vollständig analog derjenigen, welche die Beziehung zwischen Ohm'schem Widerstand und Länge und Querschnitt des elektrischen Stromkreises ausdrückt.

Man kann weiter $\varrho = \frac{1}{\mu}$ setzen, und in der Analogie fortfahrend, μ *magnetische Konduktivität* oder *Leitfähigkeit* und die reziproke Grösse ϱ *spezifischen magnetischen Widerstand* oder *Reluktivität* nennen.

In dem besonderen Falle eines magnetischen Kreises mit gleichmässigem Querschnitte und konstanter Reluktivität hat man $\mathfrak{R} = \frac{l}{\mu S} = \varrho \frac{l}{S}$; ähnlich wie bei einem elektrischen Stromkreise mit gleichmässigem Querschnitt und konstanter Resistivität d. h. konstantem spezifischem Ohm'schem Widerstand.

Wir haben oben den Fall eines mit dem Strome N-mal verketteten magnetischen Kreises betrachtet, in welchem die Induktion konstant ist. Praktisch ist es zwar fast unmöglich, Flüsse zu erhalten, die längs des ganzen Kreises konstant sind; es ist jedoch immer möglich, den magnetischen Kreis in Teile zu zerlegen, in welchen der Fluss als konstant angesehen werden kann, sodass:

$$\int \mathfrak{H}_l \varrho \, dl = \sum \mathfrak{R} \Phi.$$

Zur Vereinfachung der Berechnung der Reluktanzen $\mathfrak{R}$ wird es zweckmässig sein, den Kreis in derartige Teile zu zerlegen, dass man in jedem derselben nicht nur Φ, sondern auch μ und S als konstant annehmen kann.

In dem allgemeinen Falle, in welchem der magnetische Kreis mit mehreren Strömen verschlungen ist, wird die Formel (9) in die folgende übergeführt:

$$\sum \mathfrak{R}\Phi = 4\pi \sum Ni; \tag{12}$$

diese Beziehung ist derjenigen analog, die das zweite Kirchhoff'sche Prinzip ausdrückt.

Auch das erste Prinzip von Kirchhoff findet sein Analogon bei den magnetischen Kreisen; da die magnetische Verschiebung solenoidisch ist, so besteht zwischen den Flüssen, die in einem Punkte zusammenkommen, die Beziehung:

$$\sum \Phi = 0, \tag{13}$$

bei deren Anwendung zu beachten ist, dass der magnetische Fluss nicht nur in den magnetischen Materialien (wie der elektrische Strom nur in den Leitern), sondern auch in der Luft und allgemein in einem beliebigen Medium existiert, weil es keine magnetisch isolierenden Körper giebt, in welchen $\mu = 0$ ist. Es gelten also für die magnetischen Stromkreise dieselben Beziehungen wie für die elektrischen, und die Berechnung wird in beiden Fällen in ganz analoger Weise ausgeführt werden können.

Die Analogie, die wir zwischen den beiden Klassen von Erscheinungen bemerkt haben, besteht nur in der Form der Gleichungen, hat aber nicht ihren Grund in der physikalischen Natur der Erscheinungen selbst. In einem elektrischen Stromkreise hängen die Grössen r und ϱ von der Beschaffenheit, der Form, den Abmessungen und den physikalischen Zuständen des Körpers, namentlich der Struktur und Temperatur ab, aber sie sind von den elektrischen Grössen e und i unabhängig, oder sie hängen, wenn wir wollen, von letzterer nur indirekt ab, insofern die Temperatur von der Stromstärke abhängig ist.

Die Grössen $\mathfrak{R}$, ϱ und μ dagegen sind für einen magnetischen Kreis keine Konstanten, sondern hängen unmittelbar von den Werten von $\mathscr{B}$ und $\mathscr{H}$ ab, sie sind sogar keine durch Formeln ausdrückbaren Funktionen, weil sie nicht nur von den gegenwärtigen, sondern auch von den vorherigen Werten von $\mathscr{B}$ und $\mathscr{H}$ abhängen. In dem elektrischen Stromkreise ist i der Grösse e proportional, während in dem magnetischen Φ keineswegs der Grösse $4\pi \sum ni$ proportional ist.

103. Strom in einem magnetischen Felde. Energie. Arbeit. — Das Prinzip der Äquivalenz gestattet uns, den Ausdruck für die Energie eines elektrischen Stromes in einem magnetischen Felde zu ermitteln.

In der That ist die Energie eines einfachen, im magnetischen Felde befindlichen magnetischen Blattes mit der Potenz $\mathfrak{P}$ (16) [76]:

$$W = \mathfrak{P}\Phi,$$

wobei Φ die Zahl der Kraftlinien bedeutet, die an der Nordseite des Blattes ankommen.

Nun ist ein elektrischer Stromkreis einem magnetischen Blatte mit der Potenz $\mathfrak{P} = i$ äquivalent, und danach ist die Energie eines Stromes im magnetischen Felde durch

$$W = i\Phi$$

ausgedrückt, worin Φ der vom Felde herrührende Induktionsfluss ist, welcher die Stromfläche in entgegengesetzter Richtung als der vom Strome herrührende Fluss durchsetzt.

Bei dieser Behandlung ist es zweckmässig, als positive Richtung der Flüsse durch die Stromfläche diejenige des vom Strome hervorgebrachten Flusses anzunehmen; nach dieser Voraussetzung wird man Φ als einen negativen Fluss behandeln müssen, d. h., wenn man mit $\varphi = -\Phi$ den Fluss in der positiven Richtung bezeichnet, wird der Ausdruck der Energie eines Stromes in einem magnetischen Felde durch

$$W = -i\varphi \tag{14}$$

ausgedrückt.

Lässt man durch eine Verschiebung des Stromträgers i oder durch eine Variation des Feldes, welche von einer Veränderung der Massen oder der Ströme, die dasselbe erzeugen, hervorgebracht wird, den Wert des Flusses durch die Stromfläche von φ_1 zu φ_2 variieren, so leisten die Kräfte, die das Feld auf den Strom ausübt, eine Arbeit:

$$W = -i(\varphi_1 - \varphi_2) = i(\varphi_2 - \varphi_1),$$

welche eine positive oder negative, d. h. eine von den Kräften des Feldes, oder gegen diese von äusseren Kräften geleistete Arbeit ist, je nachdem φ_2 grösser oder kleiner als φ_1 ist, d. h. je nachdem die Energie des Systems erhöht oder vermindert wird.

Wenn dem System bewegliche Teile angehören, so bewegen sich diese unter der Wirkung der auf sie wirkenden Kräfte in der Weise, dass eine positive Arbeit geleistet, d. h. die Energie des Systems vermindert wird. Jene Lage, bei welcher der Fluss φ den höchsten Wert besitzt, ist eine Lage stabilen Gleichgewichtes.

Zur Vereinfachung der Berechnung der Reluktanzen
mässig sein, den Kreis in derartige Teile zu zerlegen,
derselben nicht nur Φ, sondern auch μ und S als kon

In dem allgemeinen Falle, in welchem der
mehreren Strömen verschlungen ist, wird die Form
übergeführt:

$$\sum \mathfrak{R}\Phi = 4\pi \sum Ni; \tag{12}$$

diese Beziehung ist derjenigen analog, die das z
Prinzip ausdrückt.

Auch das erste Prinzip von Kirchhoff fi
den magnetischen Kreisen; da die magnetische V
ist, so besteht zwischen den Flüssen, die in
kommen, die Beziehung:

$$\sum \Phi = 0, \tag{13}$$

bei deren Anwendung zu beachten ist, dass de
nur in den magnetischen Materialien (wie de
den Leitern), sondern auch in der Luft und all
Medium existiert, weil es keine magnetisch iso
welchen $\mu = 0$ ist. Es gelten also für die
dieselben Beziehungen wie für die elektrischen
in beiden Fällen in ganz analoger Weise au

Die Analogie, die wir zwischen den beid
bemerkt haben, besteht nur in der Form d
ihren Grund in der physikalischen Natur
einem elektrischen Stromkreise hängen die
schaffenheit, der Form, den Abmessungen
ständen des Körpers, namentlich der Str
sie sind von den elektrischen Grössen
hängen, wenn wir wollen, von letzter
Temperatur von der Stromstärke abhäng

Die Grössen $\mathfrak{R}$, ϱ und μ dagegen
keine Konstanten, sondern hängen un
und $\mathscr{H}$ ab, sie sind sogar keine durch
weil sie nicht nur von den gegenwär
herigen Werten von $\mathscr{B}$ und $\mathscr{H}$ abhä
kreise ist i der Grösse e proportion
keineswegs der Grösse $4\pi \sum ni$ propo

K. e erhalte in diesem Stromkreis einen Strom von der
in der Richtung des Pfeiles. Grösserer Allgemeinheit
an, die Ebene des Stromkreises sei nicht senkrecht
magnetischen Kraftlinien, die senkrecht zur Figur-
hinten gerichtet sind, bilden einen Winkel θ mit
eglichen Leiters γ (wie aus der Figur 115a ersicht-
den Leitern α und β senkrechten Schnitt darstellt).
Lage des Gleitstückes γ, welcher ein Fluss φ durch
richt, besitzt die Energie des Systems den Wert:

$$W = -i\varphi.$$

Bewegung des Leiters γ eine Änderung des Flusses
wird Arbeit verrichtet; das Feld übt also auf den
von welchen diese Arbeit herrührt.
ck γ, immer in Berührung mit den Leitern α und β
den Mittelpunkt O des Teiles AB dreht, so variiert
Stromkreis durchsetzenden Kraftlinien nicht, folglich
verrichtet; die vom Felde auf das Gleitstück aus-
besitzen eine im Punkte O angreifende Resultante F.
itsleistung ist auch in dem Falle nicht vorhanden, dass
die Berührung mit α und β beibehaltend, in seiner eigenen
parallel zu den Kraftlinien gleitet; die Kraft F ist also
Ebene $i\mathfrak{H}$, welche von der Richtung des Stromes und
Feldes gebildet wird.
dagegen dem Leiter γ eine Verschiebung z erteilt, derart,
zu sich selbst in der zur Ebene $i\mathfrak{H}$ senkrechten Richtung
ge $A'B'$ zur Lage $A_1'B_1'$ übergeht, so wird dadurch der
Werte φ_1 zum Werte φ_2 gesteigert; man findet eine positive

$$Fz = i(\varphi_2 - \varphi_1).$$

g der Kraft ist bereits vom Pfeile angedeutet; berechnen wir
irke derselben.
derung des Flusses wird durch das Produkt aus der Feld-
der Projektion $A'B'B_1'A_1'$ der erzeugten Fläche auf der zu
hten Ebene ausgedrückt, man hat nämlich, wenn l die zwischen
Berührungspunkten A und B liegende Länge des Leiters γ

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \mathfrak{H} z l \sin\theta.$$

tzung dieses Ausdruckes für $\varphi_2 - \varphi_1$ in die vorige Formel

$$F = i\mathfrak{H} l \sin\theta,$$

und folglich ist die Kraftwirkung auf die Längeneinheit des Leiters:

$$f = i\mathcal{H} \sin \theta. \tag{15}$$

Man kann folglich den Schluss ziehen:

Ein gleichförmiges magnetisches Feld übt auf einen geradlinigen, vom Strome durchflossenen Leiter Kraftwirkungen aus, welche senkrecht zur Richtung des Stromes und des Feldes und nach der linken Seite des Stromes gewendet sind, d. h. nach der linken Seite eines Beschauers, den man sich in dem Leiter in der Richtung des Stromes schwimmend und in die Richtung des Feldes blickend vorstellen kann.

Die Grösse der Kraftwirkung für die Längeneinheit des Leiters ist von dem Produkte aus Strom- und Feldstärke und dem Sinus des von ihren Richtungen eingeschlossenen Winkels gegeben, oder, wenn wir wollen, von dem Flächeninhalt des Parallelogrammes $Oio'\mathcal{H}$ (Fig. 116), *dessen Seiten die Vektoren sind, welche bezw. die Strom- und die Feldstärke darstellen.*

Die Richtung der Kraft kann auch auf folgende Weise bestimmt werden:

Denke man sich den Maxwell'schen Korkzieher in O stehend, so ist die Richtung der Kraft diejenige, in welcher der Korkzieher fortschreitet, wenn der Griff in dem Sinne sich dreht, dass i sich $\mathcal{H}$ nähert.

Wir haben die von einem gleichförmigen Felde auf einen geradlinigen Leiter ausgeübte Wirkung ins Auge gefasst. Ist das Feld nicht gleichförmig oder der Stromträger nicht geradlinig, so kann man doch die Kraft, die auf den Strom wirkt, noch durch die Formel (15) berechnen, indem man denselben in viele Teile zerlegt denkt, für welche diese Bedingungen als erfüllt angenommen werden können.

Für ein Element mit der Länge d' eines Stromkreises, in welchem die Stromstärke i herrscht, können wir annehmen, die Feldstärke $\mathcal{H}$ sei [illegible] kleinen Raume, in dem das Element liegt, und [illegible] Kraft [illegible] welcher das Feld auf das Stromelement wirkt,

$$[illegible] \sin \theta.$$

[illegible] alle Aufgaben zu lösen, die wir uns bezüglich [illegible] ein magnetisches Feld auf einen Strom ausübt, stellen

können; sie ist allgemein und führt, auf die einzelnen Elemente angewandt, das physikalische Problem auf eine mathematische Integrationsaufgabe zurück.

105. Ströme in dem von einer einzigen Masse erzeugten Felde. Kreisstrom. Elektromagnetische Einheit der Stromstärke. — Man betrachte ein Stromelement AB von der Länge dl in der Entfernung r vom Punkte m, in welchem sich die das Feld hervorbringende Masse $+m$ befindet. Die Feldstärke $\mathfrak{H}$ ist gleich $\frac{m}{r^2}$, und die Kraftwirkung auf das Element dl ist der Grösse nach:

$$df = \frac{midl}{r^2} \sin\theta$$

und der Richtung nach normal zur Ebene MAB.

Wenn $\theta = 90^0$ ist, so hat die Kraft den höchsten Wert

$$df = \frac{midl}{r^2}.$$

Man betrachte im besonderen eine im Mittelpunkt eines Kreisstromes gelegene Masse $+m$. Die Stromstärke sei i und die Stromrichtung die in Fig. 117 angedeutete; für jedes Element ist $\theta = 90^0$, und folglich ist die Kraftwirkung des Feldes auf einen Teil des Stromkreises von der Länge l

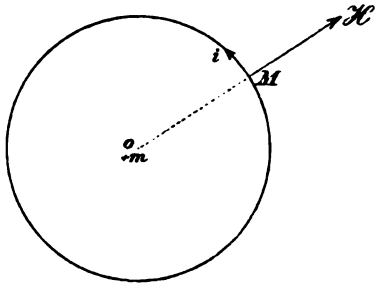


Fig. 117.

$$F = \frac{mi}{r^2} l, \tag{17}$$

und zwar in bezug auf die Zeichnungsebene von hinten nach vorn gerichtet. Die vom Teile l des Stromkreises auf die Masse m ausgeübte Kraftwirkung ist gleich, aber entgegengesetzt jener, mit welcher die Masse m auf den Strom wirkt, d. h. sie ist nach der linken Seite eines Beschauers gerichtet, welcher nicht mehr in die Richtung des Feldes, sondern gegen die Masse m hin blickt, was uns übrigens schon durch die Ampère'sche Regel für die von Strömen erzeugten Felder bekannt war.

Für den ganzen Umfang des Kreises hat diese Kraftwirkung den Wert

$$F = 2\pi \frac{mi}{r}.$$

Der hier betrachtete Fall giebt uns eine neue Definition der elektromagnetischen Einheit der Stromstärke.

Eine die Länge $l = 1$ besitzende Strecke eines Kreisstromes vom

Zwischen der von äusseren Kräften in der Zeiteinheit geleisteten Arbeit w, der Stromstärke i und der erzeugten E. M. K., die positiv angenommen wird, wenn sie die Richtung von i hat, haben wir [58] die Beziehung bestehend gefunden:

$$e = \frac{w}{i}.$$

Nun ist in unserem Falle die Energie des Systems:

$$W = -i\varphi;$$

wenn der Fluss in der Zeit dt eine Zunahme $d\varphi$ erfährt, so ist die von äusseren Kräften in der Zeit dt geleistete Arbeit $-id\varphi$ und folglich in der Zeiteinheit $w = -i\frac{d\varphi}{dt}$.

Daher muss der Stromkreis, wenn die Beziehung $e = \frac{w}{i}$ auch in diesem Falle anwendbar ist, der Sitz einer E. M. K.

$$e = -\frac{d\varphi}{dt} \tag{18}$$

sein.

Die E. M. K. (als positiv betrachtet, wenn sie dem Strome gleichgerichtet ist) ist gleich der in der Zeiteinheit erfolgenden Verminderung der Zahl der den Stromkreis durchsetzenden Kraftlinien.

Aus der Formel (18) ergiebt sich die Unabhängigkeit der E. M. K. von der Stromstärke; sie muss also denselben Wert behalten, auch wenn der Wert der Stromstärke sich ändert. Es muss ferner eine E. M. K. in einem Stromkreise entstehen, selbst wenn dieser von keinem Strome durchflossen wird, falls nur der Fluss der Kraftlinien, der die von dem Stromkreis umgrenzte Fläche durchsetzt, einen anderen Wert annimmt.

Auch diese Thatsache wurde experimentell von Faraday nachgewiesen, welcher der Gesamtheit der beschriebenen Erscheinungen den Namen *elektromagnetische* oder *magnetoelektrische Induktion* erteilte. Man nennt ferner *induzierte E. M. K.* die erzeugte E. M. K., *induzierten Strom* den Strom, den diese E. M. K. im *induzierten Stromkreise* hervorruft, wenn letzterer geschlossen ist, *induzierendes Feld* das magnetische Feld.

Die Beziehung (18), welche die Grundlage für die Behandlung der Erscheinungen der elektromagnetischen Induktion bildet und von uns theoretisch abgeleitet wurde, ist vollständig im Einklang mit den experimentellen Ergebnissen; es liefert uns dies einen weiteren Beweis für die Richtigkeit der Grundlagen, auf denen wir die oben entwickelte Theorie aufgebaut haben.

... zweckmässig sein, einige praktische Regeln anzugeben, welche die Richtung der induzierten E. M. K. leicht zu bestimmen gestatten.

... wenden wir wieder den einfachen Fall des geradlinigen, in einem magnetischen Felde beweglichen Leiters γ [104]. Man denke sich den Beschauer, wie Ampère angiebt, in die Richtung des Feldes blickend und mit dem Leiter gewissermassen schwimmend, dass die Richtung der Bewegung mit der Stromrichtung zusammenfällt. Wenn der Leiter sich in dem Sinne u bewegt, so schneidet der Beschauer Kraftlinien mit dem rechten Arme, und die E. M. K. hat die Richtung des Stromes von den Füssen zum Kopf des Beschauers; wenn sich dagegen der Leiter in dem Sinne F bewegt, so schneidet der Beschauer Kraftlinien mit dem linken Arme, und die E. M. K. hat entgegengesetzte Richtung. Je nachdem bei der Bewegung des Leiterstücks Kraftlinien mit dem rechten oder mit dem linken Arme geschnitten werden, hat die E. M. K. die Richtung von den Füssen zum Kopf des Beschauers oder die entgegengesetzte.

Allgemein findet man, dass bei einer beliebigen Bewegung des Leiters eine gewisse Zahl von Kraftlinien mit dem rechten und eine gewisse andere mit dem linken Arme geschnitten wird; die Differenz dieser beiden Zahlen heisst *Zahl der geschnittenen Kraftlinien* und ist gleich der Änderung des die Stromfläche durchsetzenden Flusses.

Die für den einfachen Fall des geradlinigen Leiters γ ermittelte Regel kann ohne weiteres auf den allgemeinen Fall eines beliebig geformten Leiters ausgedehnt werden:

Ein in einem magnetischen Felde beweglicher Leiter ist der Sitz einer E. M. K., wenn die Zahl der bei seiner Bewegung geschnittenen Kraftlinien nicht gleich Null ist. Die E. M. K. ist von den Füssen zu dem Kopf eines Beschauers gerichtet, welcher, gewissermassen innerhalb des Leiters in der Richtung des Stromes schwimmend, in die Richtung des Feldes blickt und bei der Bewegung Kraftlinien mit dem rechten Arme schneidet, und entgegengesetzt gerichtet, wenn die Kraftlinien mit dem linken Arme geschnitten werden.

Eine andere, für den praktischen Gebrauch sehr zweckmässige Regel ist die von Fleeming-Jenkin:

Man strecke den Daumen, Zeige- und Mittelfinger der rechten Hand so aus, dass dieselben sämtlich rechtwinklig zu einander stehen, und nehme als positive Richtung der Finger diejenige von der Handwurzel nach den Spitzen an. Wenn man den Daumen in der Richtung der Bewegung und

Zeigefinger in der des induzierenden Feldes hält, so giebt der Mittel-
er die Richtung der induzierten E. M. K. an.

Eine Regel, die immer anwendbar ist, ganz gleichgiltig, wie die
derung des Flusses hervorgebracht wird, auch ohne Bewegung eines
les des Stromkreises, ist die folgende:

Die induzierte E. M. K. hat die Richtung der rotierenden Bewegung
s in der Richtung des Feldes fortschreitenden Korkziehers, wenn der die
mfläche durchsetzende Fluss abnimmt.

107. Gesetze von Lenz und Neumann. — In dem einfachen Falle eines
adlinigen Leiters γ haben wir gesehen [104], dass das gleichförmige
gnetische Feld ponderomotorische Kräfte ausübt, welche die Richtung
oder die entgegengesetzte u haben, je nachdem der Strom die Rich-
g i oder die entgegengesetzte besitzt. Bewegt sich nun der Leiter in
Richtung F, so ist der induzierte Strom zu i entgegengerichtet, be-
gt er sich dagegen in der Richtung u so hat der Strom die Richtung i;
beiden Fällen übt also das magnetische Feld auf den induzierten Strom
ifte aus, welche die den Strom hervorbringende Bewegung zu hemmen
hen.

Diese Eigenschaft hat eine ganz allgemeine Giltigkeit. Man kann
o den Satz aussprechen:

Auf den Strom, der in einem geschlossenen Stromkreise durch die Be-
gung eines seiner Teile hervorgerufen wird, übt das induzierende Feld
äfte aus, die sich der Bewegung selbst entgegensetzen.

Dieses zum ersten Male von Lenz ausgesprochene Gesetz kann bei
n heutigen Stande der physikalischen Studien als eine selbstverständ-
ne Folgerung des Prinzips von der Erhaltung der Energie aufgefasst
rden; die von dem induzierten Strome dargestellte Energie muss sich
wendigerweise aus der Transformation einer anderen Energieform
eben, und zwar der Arbeit, die aufgewandt wird, um die Bewegung
gen die Reaktionskräfte des Feldes, welche sich der Bewegung selbst
gegensetzen, hervorzubringen.

Aus dem allgemeinen Ausdrucke

$$e = \frac{w}{i}$$

nen wir das *Neumann'sche Gesetz* ableiten, welches den Wert der indu-

zierten E. M. K. bestimmt. Setzen wir in diesem Ausdruck $i = 1$, so ergiebt sich

$$e = w,$$

woraus folgt:

Die bei der Bewegung eines Leiters in einem magnetischen Felde induzierte E. M. K. ist numerisch gleich der Arbeit, die man in der Zeiteinheit aufwenden muss, um die Bewegung des Leiters hervorzubringen, wenn derselbe von einem Strome mit der Intensität Eins durchflossen wird.

108. Induzierte Elektrizitätsmenge. — Es soll die gesamte Elektrizitätsmenge Q, welche in dem induzierten Stromkreise durch eine bestimmte Änderung des induzierenden Flusses vom Werte φ_1 zum Werte φ_2 erzeugt wird, berechnet werden.

Bedeutet r den Widerstand des Stromkreises, so ist die Stärke des induzierten Stromes in einem Moment, in welchem die induzierte E. M. K. den Wert $e = -\frac{d\varphi}{dt}$ besitzt, nach dem Ohm'schen Gesetze [111]:

$$i = \frac{e}{r} = -\frac{1}{r}\frac{d\varphi}{dt},$$

woraus folgt:

$$idt = -\frac{1}{r}d\varphi.$$

Nun ist idt die Elektrizitätsmenge, die in der Zeit dt den Stromkreis durchfliesst, folglich hat man durch Integration über die ganze Zeit, während welcher die Änderung des Flusses stattfindet:

$$Q = \int idt = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{r}. \tag{19}$$

Die gesamte von einer Änderung des Flusses induzierte Elektrizitätsmenge ist durch das Verhältnis dieser Änderung zum Widerstand des Stromkreises ausgedrückt.

Der Wert Q hängt also nur von den Endwerten des Flusses, und nicht von den Zwischenwerten, ab.

Wenn im besondern $\varphi_1 = \varphi_2$ ist, wird $Q = 0$, d. h. wenn der induzierende Fluss so variiert, dass er am Ende den ursprünglichen Wert wieder annimmt, dann wird der Leiter von zwei entgegengesetzt gleichen Elektrizitätsmengen durchflossen, und die gesamte induzierte E. M. K. ist gleich Null.

109. Allgemeine Beziehung zwischen der Änderung der magnetischen Verschiebung und der induzierten E. M. K. — In den Entwickelungen

der vorigen Abschnitte haben wir uns vornehmlich auf den einfachen Fall eines Stromkreises bezogen, welcher einen geradlinigen, in einem magnetischen Felde beweglichen Teil besass: doch gilt die Beziehung (18), wie wir schon bemerkt haben, ganz allgemein. Die Herleitungsweise, durch welche wir dieselbe ermittelt haben, zeigt uns, dass die induzierte E. M. K. lediglich von der Änderung des den Stromkreis durchsetzenden Flusses und nicht von der Art, in welcher diese Änderung hervorgebracht wird, abhängt. Die Änderung des Flusses kann durch die Bewegung des Stromkreises oder des magnetischen Feldes, oder durch die Änderung der Permeabilität des Mediums, in welchem das Feld vorhanden ist, oder endlich durch eine Änderung der das Feld hervorbringenden Ursachen entstehen; unabhängig von der Art, in welcher man die Änderung des Flusses durch die Stromfläche und folglich die der magnetischen Verschiebung erzielt, immer entsteht im Stromkreise eine E. M. K.

$$e = -\frac{d\varphi}{dt}.$$

Im Anfang dieses Kapitels haben wir gesagt, dass man bei der Behandlung des Elektromagnetismus zwei Klassen von Erscheinungen zu betrachten hat, und zwar eine durch eine Änderung der elektrischen Verschiebung hervorgebrachte magnetische und eine durch eine Änderung der magnetischen Verschiebung hervorgerufene elektrische Verschiebung, und ferner, dass für die beiden Klassen von Erscheinungen dasselbe Gesetz gilt.

Wir können jetzt die Richtigkeit dieser Behauptung erkennen.

In der That gilt für die erste Klasse die allgemeine Beziehung:

$$\int \mathfrak{H}_l \varrho dl = 4\pi \sum N i, \tag{9}$$

für die zweite:

$$e = -\frac{d\varphi}{dt}. \tag{18}$$

Erinnern wir uns nun, dass $\sum Ni$ die gesamte Elektrizitätsmenge ist, die in der Zeiteinheit durch die betrachtete, geschlossene Linie hindurchgeht, d. h. die Änderung der elektrischen Verschiebung, ferner, dass die Summe e der in einem geschlossenen Stromkreise wirkenden E. M. KK. das Integral der elektrischen Kraft längs des Stromkreises ist, und endlich, dass $\frac{d\varphi}{dt}$ die Änderung der magnetischen Induktion durch die Stromfläche in der Zeiteinheit, d. h. nach der Formel (20) [80] gleich der Änderung der Verschiebung multipliziert mit 4π ist, so können wir leicht einsehen, dass die beiden Beziehungen (9) und (18) in das folgende einfache Gesetz zusammengefasst werden können:

[illegible] der elektrischen Kraft längs einer [illegible] von dem konstanten Faktor 4π, [illegible] der der magnetischen Verschiebung

[illegible] Änderung der Stromstärke. Koeffizient [illegible] der Selbstinduktion. — Besondere Be- [illegible] das induzierende magnetische [illegible] herrührt: eine Änderung dieses [illegible] Feldstärke und des den induzierten [illegible] und ruft folglich im Strom- [illegible] Auch diese Thatsache wurde von [illegible] der das induzierende Feld her- [illegible] Die Erfahrung lehrt, dass die [illegible] numerisch gleich der Änderung [illegible]

[illegible] Fall an, welchen wir be- [illegible]

[illegible] Fig. 118), und der sie [illegible] welchem die von dem in einem [illegible] erzeugten Induktionslinien ver- [illegible] sei mit einer Substanz, deren [illegible] Permeabilität unabhängig von den Werten der magnetischen Kraft und [illegible] Induktion ist, z. B. mit Luft aus- [illegible] Fliesst ein Strom i_a in dem [illegible] des Pfeiles im Stromkreise A, [illegible] wird eine gewisse Zahl von In- [illegible] Induktionslinien in der Richtung φ_a ver- [illegible] welche sich aussen schliessen. [illegible] von diesen Linien werden [illegible] die Stromfläche B durchsetzen; [illegible] durch den Stromkreis B [illegible] des Mediums als konstant [illegible] Stromstärke i_a, von der Form und der [illegible] ab; man kann also

[illegible]

[illegible] Anordnung des gegebenen [illegible]

[illegible] Strom i_a in dem Stromkreise B

einen magnetischen Fluss hervor, von dem ein Teil den Stromkreis A durchdringt.

Bezeichnet M' eine Konstante, welche ebenfalls nur von der geometrischen Anordnung des Systems abhängt, so kann man ferner setzen:

$$\varphi_a = M' i_b.$$

Man nehme jetzt an, beide Ströme i_a und i_b seien gleichzeitig vorhanden. Dieses System stellt dann eine gewisse Energie dar, deren Wert man ermitteln kann, sowohl indem man den Strom i_a in dem vom Strome i_b erzeugten Felde, als auch indem man den Strom i_b in dem vom Strome i_a erzeugten Felde betrachtet. Im ersten Falle ist die Energie durch

$$-\varphi_a i_a = -M' i_b i_a$$

und im zweiten durch

$$-\varphi_b i_b = -M i_a i_b$$

ausgedrückt.

Indem man die beiden Ausdrücke der Energie des Systems einander gleich setzt, erhält man:

$$M = M'$$

und folglich:

(20) $$\varphi_a = M i_b, \qquad \varphi_b = M i_a.$$

Man betrachte nunmehr den Stromkreis A als induzierend und den Stromkreis B als induziert. Wird jetzt eine Änderung der Stromstärke i_a hervorgebracht, so ändert sich der Wert des Flusses φ_b, und es entsteht im Stromkreise B eine E. M. K.

(21) $$e_b = -\frac{d\varphi_b}{dt} = -M\frac{di_a}{dt}.$$

In analoger Weise findet man, wenn man den Stromkreis B als induzierend und den Stromkreis A als induziert ansieht, dass im Stromkreise A infolge einer Veränderung der Stromstärke i_b eine E. M. K. entsteht:

$$e_a = -\frac{d\varphi_a}{dt} = -M\frac{di_b}{dt}.$$

Es folgt also, dass die induzierte E. M. K. in einem Stromkreise, die Permeabilität des Mediums als konstant vorausgesetzt, nur von der Änderung der Stromstärke in dem anderen Stromkreise abhängt.

Der Faktor M, welcher eine Konstante für zwei gegebene Stromkreise ist und derselbe bleibt, gleichgiltig, welcher von den beiden Stromkreisen als induziert, und welcher als induzierend gewählt wird, heisst *Koeffizient der gegenseitigen Induktion* beider Stromkreise.

... Koeffizienten können zwei Definitionen gegeben werden ... behandelten Falle gleichwertig sind); wir können ... definieren, indem wir entweder von der Betrachtung ... der Betrachtung der induzierten E. M. K. ausgehen.

... der Formel (20) $i_b = 1$, $i_a = 1$, so ist

$$\varphi_a = M \qquad \varphi_b = M,$$

... können daher sagen:

... *der gegenseitigen Induktion zweier Stromkreise ist gleich ... der einen beliebigen derselben durchsetzt, wenn der andere ... mit der Stärke Eins durchflossen wird.*

... man in der Formel (21) $\frac{di_a}{dt} = 1$, $\frac{di_b}{dt} = 1$, so ist in absolutem Maße

$$e_a = M, \quad e_b = M.$$

... können also noch folgende Definition anfügen:

... *Koeffizient der gegenseitigen Induktion zweier Stromkreise ist in ... Maße gleich der E. M. K., die in einem beliebigen derselben indu... wird, wenn in dem anderen die Stromstärke in der Zeiteinheit um die ... variiert.*

Der Wert des Koeffizienten M ändert sich mit der Form und der Lage der beiden Stromkreise. Man nehme an, dass der eine Stromkreis B z. B. unverändert festgehalten werde, während der andere Stromkreis A stetige Veränderungen in seiner Form und Lage erfahre; dann ändert sich auch M kontinuierlich, weil der von dem Strome in A hervorgebrachte Fluss durch B stetig variiert. Wenn der Stromkreis B sich immer mehr der Form und Lage des Stromkreises A nähert, bis er endlich mit diesem zusammenfällt, so nimmt M eine Reihe von Werten an, welche einem bestimmten Grenzwert zustreben, der nur von der Form und der Lage des Stromkreises A abhängt. Dieser Grenzwert, den wir mit L bezeichnen wollen, heisst *Koeffizient der Induktion des Stromkreises auf sich selbst* oder *Koeffizient der Selbstinduktion* oder auch nach dem Vorschlag der englischen Techniker und gemäss der offiziellen Annahme auf dem internationalen Kongress in Chicago *Induktanz*.

Nach Einführung dieses Koeffizienten lässt sich der von einem Strome durch seinen eigenen Stromkreis hervorgebrachte Fluss durch

(20') $$\varphi = Li$$

sdrücken; wenn i variiert, so variiert auch der Fluss φ, und folglich tsteht im Stromkreise eine E. M. K.

l′) $$e = -L\frac{di}{dt}.$$

Variiert die Stromstärke in einem Stromkreise, so ist dieser der Sitz er E. M. K., welche dieselbe Richtung, wie der Strom besitzt, wenn ssen Stärke abnimmt, und die entgegengesetzte, wenn die Stromstärke chst, d. h. wenn di positiv ist.

Auch diese Thatsache, die wir als Folgerung der Formel (18) ableitet haben, wurde experimentell von Faraday bewiesen. Bis jetzt haben r zwei Stromkreise in einem Raume betrachtet, wo die magnetische rmeabilität einen konstanten Wert unabhängig von dem Werte der gnetischen Kraft und der Stärke des induzierenden Stromes besass. enn jedoch μ nicht konstant ist, so ist der von einem Strome durch a anderen Stromkreis hervorgebrachte Fluss nicht mehr der Stromrke proportional, sondern er hängt von dem Werte der magnetischen rmeabilität ab. Alle Formeln und Definitionen, die wir vorher festetzt haben, verlieren ihre Bedeutung, und der Vorteil, die Koeffizienten r gegenseitigen Induktion und der Selbstinduktion zu betrachten, hört allgemeinen auf, weil es, da sie nicht konstant sind, für die Berechng der induzierten E. M. K. zweckmässiger ist, sich der allgemeinen rmel (18) zu bedienen.

Es kann jedoch in manchen Fällen die Betrachtung der Induktionsffizienten auch für einen Raum mit veränderlicher Permeabilität von rteil sein. Die Induktionskoeffizienten hängen dann nicht allein von r geometrischen Anordnung des Systems, sondern auch von der Stärke induzierenden Stromes ab; sie sind sogar, wenn das Medium hystesch ist, nicht nur von dem letzten, sondern auch von den vorhernenden Werten der Stromstärke abhängig.

Man kann beide für den besonderen, betrachteten Fall angegebene finitionen auf den allgemeinen Fall ausdehnen; sie hören dann aber auf, ichwertig zu sein.

Wenn man den Induktionsfluss betrachtet, so existiert ein konstantes rhältnis des induzierten Flusses zum induzierenden Strome nicht mehr, h. es bestehen die Beziehungen (20) und (20′) nur dann, wenn M l L als variabel angesehen werden. Man kann unter dieser Annahme veränderlichen Quotienten

) $$M = \frac{\varphi_a}{i_b} = \frac{\varphi_b}{i_a}, \qquad L = \frac{\varphi}{i},$$

r, wenn man will, ihre der Einheit der Stromstärke entsprechenden

Werte, d. h. die Werte des von einem induzierenden Strome mit der Stärke *Eins* induzierten Flusses, doch noch als Koeffizienten der gegenseitigen Induktion bezw. der Selbstinduktion bezeichnen. In diesem Falle müssen notwendigerweise die induzierten E. M. KK. in folgender Form:

$$e_a = -\frac{d(Mi_b)}{dt}, \quad e_b = -\frac{d(Mi_b)}{dt}, \quad e = -\frac{d(Li)}{dt}$$

geschrieben werden.

Die induzierten E. M. KK. können aber auch in der Form (21) (21′) dargestellt werden, wenn man mit M und L zwei veränderliche Koeffizienten bezeichnet, welche andere Werte als die vorherbetrachteten besitzen. In der That ergiebt sich aus der Formel (21′):

$$(22') \qquad L = -\frac{e}{\frac{di}{dt}} = -\frac{-\frac{d\varphi}{dt}}{\frac{di}{dt}} = \frac{d\varphi}{di},$$

und in analoger Weise aus der Formel (21):

$$(22'') \qquad M = \frac{d\varphi_a}{di_b} = \frac{d\varphi_b}{di_a}.$$

Auch in diesem Falle kann man diese veränderlichen Koeffizienten M und L, d. h. die Grössen, mit welchen man die Änderung des induzierenden Stromes in der Zeiteinheit multiplizieren muss, um die induzierte E. M. K. zu ermitteln, als Koeffizienten der gegenseitigen Induktion und der Selbstinduktion bezeichnen.

Diese Definition muss als offiziell adoptiert betrachtet werden, weil dieselbe bei der Definition der Einheit der Induktanz (Henry) vorausgesetzt wird, welche von dem internationalen Kongress in Chicago festgesetzt wurde.

Ein Stromkreis, in welchem eine E. M. K. Eins entsteht, wenn der induzierende Strom in der Zeiteinheit um die Einheit variiert, besitzt die Einheit der Induktanz.

Fünftes Kapitel.

Veränderliche Ströme.

§ 1.

Grundgesetze und allgemeine Betrachtungen.

111. Ohm'sches Gesetz. Wird ein Stromkreis von einem mit der Zeit sich ändernden Strome durchflossen, so superponiert sich zu der in jedem Augenblicke infolge der in dem Kreise wirksamen Stromquelle herrschenden E. M. K. e die durch die Selbstinduktion in dem Kreise jeweilig hervorgerufene E. M. K.: $-\frac{d\varphi}{dt}$, und die gesamte in dem betrachteten Moment im Stromkreise wirksame E. M. K. ist gleich: $e-\frac{d\varphi}{dt}$.

Obwohl die Giltigkeit des Ohm'schen Gesetzes nur für Gleichströme bewiesen worden ist, so sind wir doch durch die Gesamtheit der Erfahrungen berechtigt, dasselbe auf den Fall von veränderlichen Strömen auszudehnen und in allgemeiner Form folgendermassen auszusprechen:

In einem von veränderlichem Strome durchflossenen Stromkreise ist die Stromstärke in einem bestimmten Moment durch den Quotienten aus der Summe aller in jenem Moment in dem Stromkreise herrschenden E. M. KK. und dem Widerstand des Stromkreises gegeben.

In einem geschlossenen Stromkreise besteht also in jedem Augenblick für den ganzen Kreis zwischen der E. M. K. und der Stromstärke die allgemeine Beziehung:

$$e-\frac{d\varphi}{dt}=ri; \tag{1}$$

für einen Teil des Stromkreises dagegen, zwischen dessen Endstellen eine Potentialdifferenz v herrscht, gilt die Gleichung:

$$v+e-\frac{d\varphi}{dt}=ri. \tag{1'}$$

W. [illegible] des Stromkreises. Die
E. [illegible]
In. [illegible]
no [illegible]

[illegible] Stromstärke haben
ge [illegible] selben Wirkungen der
[illegible] wirkte, während
dar [illegible] i_1 superponiert in-
zie [illegible]
sitz [illegible] Stromstärke hervor-

[illegible] Betrachtung des
(22 [illegible] mstärke in einem
[illegible] enfalls konstanten
und

[illegible] mit einer ge-
(22" [illegible] beim Schliessen des
[illegible] Stromstärke vom
M u [illegible] Stromkreises da-
zieren [illegible] somit auch die
E. M. [illegible] Zeit, während
der S [illegible] zu der normalen
D. [illegible] hinzu. Beim
dieselb [illegible] weil der Fluss
gesetzt [illegible] beim Öffnen
gesetzt [illegible] Richtung, wie
[illegible] i_2 nennt man
Ein [illegible] *strom.* Die-
induzier [illegible] worden.
Einheit [illegible]

[illegible] **Stromenergie.** Die
[illegible] mit *idt* auf

[illegible] welche die
[illegible] aufzuwenden
[illegible] was au
[illegible] Arbeit
[illegible] die nöti

eiben wir bei der Betrachtung Arbeitsgrösse $id\varphi$ und versuchen nächst, dieselbe anders auszu-. Betrachten wir den Stromkreis 119 und stellen wir uns das von rvorgebrachte Feld in viele un- dünne Induktionsröhren zerlegt ezeichnet ψ den Wert des Flusses ner dieser Röhren, so ist der ge- luss durch die Gleichung:

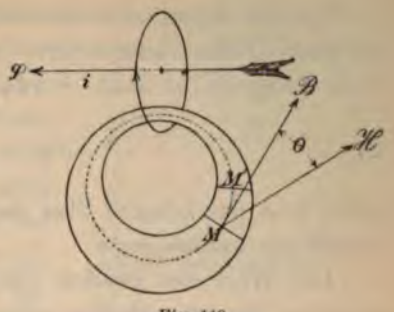


Fig. 119.

$$\varphi = \sum\psi$$

r die Änderung des Flusses in der Zeit dt gilt dann:

$$d\varphi = \sum d\psi$$

glich ist:

$$id\varphi = i\sum d\psi = \sum id\psi.$$

wird also genügen, den Posten $id\psi$ für eine beliebige der be- en, unendlich dünnen Flussröhren zu berechnen und die Summierung e Gesamtheit dieser Röhren auszuführen.

ngs jeder Röhre ist der Fluss ψ konstant, und wenn a den Flächen- eines beliebigen Schnittes M und $\mathfrak{B}$ den Wert der magnetischen on in demselben bedeutet, so ist:

$$d\psi = a d\mathfrak{B}.$$

n lässt sich das Integral der magnetischen Kraft längs der In- slinie, welche durch die Achse der betrachteten Röhre dargestellt ach Formel (9) [100] ausdrücken, wie folgt:

$$\int \mathfrak{H}_s ds = 4\pi i,$$

ds das zwischen den einander unendlich nahen Röhrenschnitten M $'$ gelegene Linienelement und $\mathfrak{H}_s = \mathfrak{H}\cos\theta$ die Tangentialkom- der Kraft bedeutet. Daraus ergiebt sich:

$$i = \frac{1}{4\pi}\int \mathfrak{H}_s ds,$$

glich:

$$id\psi = \frac{a d\mathfrak{B}}{4\pi}\int \mathfrak{H}_s ds = \frac{1}{4\pi}\int a d\mathfrak{B}\,\mathfrak{H}_s ds.$$

ber ist $ads = dv$ das von den beiden Schnitten M und M' der begrenzte Volumenelement; man kann also setzen:

$$id\psi = \frac{1}{4\pi}\int \mathfrak{H}_s d\mathfrak{B} dv.$$

112. Extras
Beziehung (1) k

gebracht werde
würde, wenn i
Selbstinduktion
$i_2 = \frac{1}{r}\frac{d\varphi}{dt}$ der
folge des Au
gerufenen E.
Diese
Falles, dass
Stromkreise
Wert überge
In eine
wissen E. M
Stromkreise
Werte $i =$
gegen fälle
Stromstärk
welcher d
Stromstärk
Schliessen
von dem
dagegen
i_1. Diese
Extrastr
selben s

113.
Gleichu
die For

bringen
Da
E. M. K
hat, un
dieser
der Jou
ist, um

dieses über
Summe aller
schreiben:

magnetischen Feldes

derselbe, wie
Linienelement des

Einheit eine Arbeit

auf das ganze Feld
Behandlung der
Induktion und Ver-
einer besonderen
Mediums aufgefasst
Erzeugung der Defor-

bei der Betrachtung
herrühren, ledig-
Elektromagnetismus
einer Änderung im
welcher mit demjenigen
magnetischen Ver-
magnetisches Feld er-
dafür, dass der Be-
ungen zwischen mag-
in berechtigter Weise
also das bei der Be-
eingeschlagene Ver-
erhaltenen Resultate
richtig betrachten.
$\int i d\varphi$ für die zur Er-
zum Felde des Stromes

Stromkreise die Strom
entsprechend geht der
Linie AMB (Fig. 120

Abscissen die Werte von i und als Ordinaten die zugehörigen Werte φ. Diese Linie (die man konstruieren kann, wenn für alle Materialien, ch welche die vom Strome hervorgebrachten sslinien hindurchgehen, die zwischen $\mathfrak{B}$ und bestehende Beziehung bekannt ist, da i mit und φ mit $\mathfrak{B}$ proportional variiert) bietet e geometrische Darstellung der Arbeit. In That ist der Inhalt der Fläche $MmnN$, n wir zwei einander unendlich nahe ge- ene Punkte M und N der Kurve ins Auge en, deren Ordinaten Om und On um $d\varphi$ erieren, gleich $id\varphi$, d. h. gleich der Arbeit, man aufwenden muss, um die Änderung des Flusses hervorzubringen. Die zur Er-

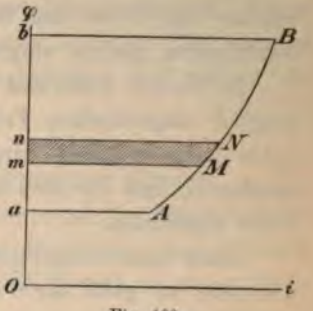


Fig. 120.

gung einer endlichen Änderung des Flusses vom Werte $\varphi_1 = Oa$ zum rte $\varphi_2 = Ob$ verrichtete Arbeit ist gleich der Summe der Elementar- iten, d. h. gleich dem Inhalte der Fläche $aAMBb$, welche von der inatenachse, von der Kurve selbst und von den Abscissen der End- kte derselben begrenzt wird.

Nehmen wir nun an, dass der Wert des Flusses von φ_2 wieder zum nglichen Werte φ_1 übergehe. Hier können zwei Fälle eintreten.

Ist im Felde ein hysteretisches Material vorhanden, so erhält der s φ einen grösseren Wert als denjenigen, welchen er vorher für den- en Wert von i hatte; man wird bei dem Zurückgehen des Flusses den Wert φ_1 eine ganz oberhalb $AMNB$ gelegene Kurve BQA lten (Fig. 121). Die Fläche $bBQAa$ t eine negative Arbeit dar, eine it, welche als zurückerstattet be- tet werden kann, indem der Fluss den Wert φ_1 zurückkehrt. Es nicht die ganze Arbeit, die auf- ndt wurde, um den Wert des ses von φ_1 in φ_2 überzuführen, ckgegeben, wenn der Fluss vom te φ_2 zum Werte φ_1 zurückkehrt, sondern ein Teil derselben, von der he $AMBQA$ dargestellt, wird infolge der Hysteresis in Wärme umgesetzt.

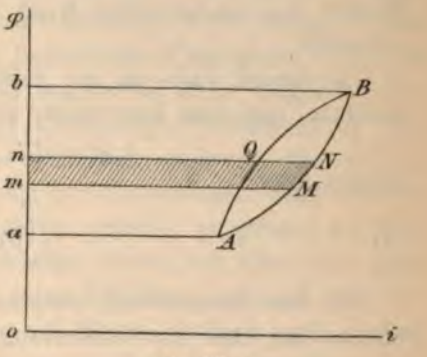


Fig. 121.

Wenn sich dagegen im Felde keine hysteretischen Materialien be- den, so nimmt der Fluss bei der Rückkehr für jeden einzelnen Wert i den früheren Wert an, und man bekommt bei abnehmenden Werten

von i dieselbe Kurve $BNMA$. Es wird also die ganze zur Änderung des Flusses von φ_1 zu φ_2 aufgewandte Arbeit zurückgegeben, wenn der Fluss von φ_2 zum anfänglichen Wert φ_1 zurückkehrt. Während der Zeit, in welcher der Fluss den Wert φ_2 beibehält, kann diese Arbeit als in dem betreffenden Raume aufgespeichert angesehen werden.

In diesem Falle hat man in dem von einem elektrischen Strome erzeugten magnetischen Felde eine *potentielle Energie* zu betrachten, die im Felde aufgespeichert wird, wenn die Stromstärke und folglich der Fluss zunehmen, und die sich in Arbeit umsetzt, wenn die Stromstärke und der Fluss abnehmen.

Lässt man beispielsweise die Stromstärke von Null bis zum Werte i wachsen, so geht der Fluss von Null zum Werte φ über, welcher eine bestimmte Funktion von i ist, wenn im Felde keine mit Hysteresis behafteten Körper vorhanden sind. Um diese Veränderung hervorzubringen, muss man eine Arbeit $\int_0^{\varphi} i\,d\varphi$ aufwenden, welche im Felde aufgespeichert wird und in potentiellem Zustande bleibt, solange die Stromstärke den erreichten Wert i beibehält, und zurückgegeben wird, wenn die Stromstärke wieder zu Null wird. Diese im Felde aufgespeicherte potentielle Energie nennt man *innere Stromenergie*. Sie hat natürlich nur dann einen bestimmten Wert, wenn im Felde keine Hysteresis auftritt, weil sonst nicht die ganze aufgespeicherte Energie zurückgegeben wird, und nimmt einen einfachen Ausdruck an, wenn die magnetische Permeabilität, unabhängig von den Werten der magnetischen Kraft und Induktion, einen konstanten Wert μ besitzt.

In diesem Falle ist der Selbstinduktionskoeffizient des Stromkreises konstant, und man kann daher schreiben:

$$\varphi = Li, \qquad d\varphi = Ldi,$$

woraus folgt:

$$\int_0^{\varphi} i\,d\varphi = \tfrac{1}{2} L i^2. \tag{3}$$

In dem Zeitintervall, während dessen die Stromstärke zunimmt, z. B. unmittelbar nach der Schliessung des Stromkreises, setzt sich nicht die ganze von der auf den Stromkreis wirkenden E. M. K. geleistete Arbeit in Wärme um, sondern es wird ein Teil dazu verwendet, das magnetische Feld zu erzeugen. Die Stromstärke ist daher zu Anfang kleiner, als während des dann eintretenden Beharrungszustandes; oder, es addiert sich sozusagen zum normalen Strome ein entgegengerichteter Schliessungsstrom. Solange die Stromstärke konstant bleibt, ist das magnetische Feld konstant und die Arbeit in potentiellem Zustande aufgespeichert. Wenn die

Stromstärke, z. B. durch Öffnen des Stromkreises, abnimmt, so ist die geleistete Arbeit grösser, als die von der E. M. K. herrührende Arbeit, denn das magnetische Feld giebt beim Verschwinden die vorher in ihm angehäufte Energie zurück. Zu dem vorher bestehenden Strome addiert sich ein Öffnungsextrastrom, der dieselbe Richtung besitzt. Die Arbeitsleistung, welche dieser Strom hervorbringt, entspricht der vorher angesammelten Energie, die nun frei wird.

114. Mechanische Analogien. Natur des elektrischen Stromes. — Die eben betrachteten, von der Induktanz des Stromkreises herrührenden Erscheinungen sind denjenigen analog, die bei der Strömung einer Flüssigkeit durch den Einfluss der Trägheit auftreten. Will man in einem Rohr eine gewisse Flüssigkeitsmenge in Bewegung setzen, so muss man während der Zeit, in welcher die Geschwindigkeit zunimmt, nicht nur die wegen der Reibung in Wärme umgesetzte Arbeit, sondern auch diejenige, die sich in lebendige Kraft umwandelt, aufwenden. Letztere stellt uns eine verfügbare Energie dar, die zurückgegeben wird, wenn die Geschwindigkeit abnimmt; selbst nach dem Aufhören der Ursache, welche die Bewegung hervorbrachte, dauert die Bewegung der Flüssigkeit so lange fort, bis die Reibung die ganze der lebendigen Kraft entsprechende Energie aufgezehrt hat.

Die Analogie zwischen dem elektrischen Strome und der Strömung einer Flüssigkeit beschränkt sich jedoch auf die erwähnte Thatsache; es giebt aber wesentliche Verschiedenheiten zwischen beiden Arten von Erscheinungen. Im Falle der hydraulischen Strömung ist die Energie in der Masse der in dem Rohre in Bewegung befindlichen Flüssigkeit vorhanden und ganz unabhängig von den Körpern, welche das Rohr umgeben. Bei dem elektrischen Strome dagegen liegt die Energie keineswegs in dem Stromleiter, in welchem man den Strom betrachtet, sondern in dem ganzen umgebenden Raume, nämlich in dem vom Strome erzeugten magnetischen Felde, und der Wert der Energie ist um so grösser, je grösser die Permeabilität des Mediums ist. Ein elektrischer Strom hat also einen ganz anderen Charakter, als die Strömung eines Fluidums, und ist eine Erscheinung, welche ihren Sitz nicht nur im Leiter, sondern auch in dem umgebenden Felde hat; man kann sogar sagen, dass der wesentliche Teil der Erscheinungen, die den „Strom“ darstellen, in dem umgebenden Medium seinen Sitz hat, weil eben im Felde die Energie vorhanden ist, während dagegen im Leiter nur ein Energieverbrauch stattfindet.

Und doch erfüllt der Leiter eine wichtige Aufgabe, er erteilt nämlich der Erscheinung eine bestimmte Richtung; von der Gestalt des Leiters hängt die Verteilung des magnetischen Feldes ab. Es wäre aber ein

Irrtum, den Strom als eine Erscheinung, welche sich nur im Leiter abspielt, als etwas, das sich im Leiter fortpflanzt, anzusehen, weil eben das wesentliche Merkmal des elektrischen Stromes in der Existenz eines magnetischen Feldes besteht, in welchem die Kraftlinien in sich selbst geschlossene, den Leiter umschlingende Linien sind.

§ 2.

Wechselströme.

115. Alternierende Grössen. Graphische Darstellung. Definitionen. — Bei vielen der praktischen Nutzanwendungen, welche bei dem heutigen Stande der Elektrotechnik sehr grosse Wichtigkeit besitzen, treten kontinuierlich und periodisch sich verändernde Ströme auf. Es sind Ströme, deren Richtung in sehr kleinen und gleichen Zeitintervallen sich umkehrt und deren Stärke fortgesetzt von einem Maximum in einer Richtung zu einem Maximum in entgegengesetzter Richtung variiert. Diese Ströme werden *Wechselströme* (alternierende Ströme) genannt.

Die Beschaffenheit der Apparate, durch welche Wechselströme erzeugt werden, bedingt es, dass die sehr kurzen Zeitintervalle zwischen zwei aufeinander folgenden Wechseln des Stromes einander gleich sind; ferner sind der positive und der negative Maximalwert, die der Strom annimmt, einander gleich, und schliesslich ist die in einer Richtung fliessende Elektrizitätsmenge gleich derjenigen, die in der entgegengesetzten fliesst, sodass die gesamte Elektrizitätsmenge nach einem Zeitintervall, welcher eine gerade Zahl von Wechseln einschliesst, gleich Null ist.

Man trage auf der Abscissenachse Ot (Fig. 122), in einem beliebigen Punkte anfangend, Längen proportional den Zeiten und als Ordinaten die entsprechenden Werte der Stromstärke auf, dann erhält man eine stetige Linie, welche aus vielen sich wiederholenden Teilen wie $AMBNA_1$ besteht. Die Längen AB, BA_1, ... zwischen zwei aufeinander folgenden Schnittpunkten auf der Achse, d. h. zwischen zwei aufeinander folgenden Wechseln des Stromes, sind einander gleich; die Maximalwerte mM, nN, ... sind ebenfalls einander gleich, und ferner sind die Flächeninhalte der zwischen der Achse und jedem der Teile der Kurve eingeschlossenen Flächen AMB, BNA_1, ... auch gleich, weil sie uns das Integral $\int i dt$, d. h. die den Stromkreis zwischen zwei aufeinander folgenden Wechseln durchfliessende Elektrizitätsmenge, darstellen.

In einem Stromkreise, in welchem die Stromstärke wechselt, sind die E. M. KK. und die Potentialdifferenzen ebenfalls alternierende Grössen,

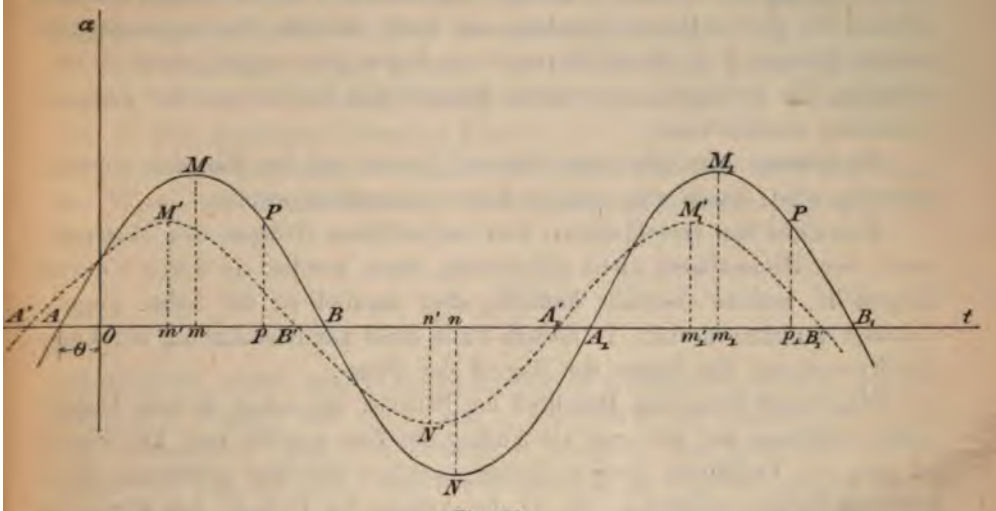


Fig. 122.

welche die eben erwähnten Eigenschaften besitzen und folglich durch ähnliche Kurven dargestellt werden können.

Wir wollen nun für eine beliebige alternierende Grösse a einige Definitionen aufstellen.

Die Zeit, während welcher die Grösse alle möglichen positiven und negativen Werte, die sie überhaupt durchlaufen kann, annimmt, und nach deren Verlauf sie eben diese Werte in derselben Reihenfolge wieder annimmt, heisst *Dauer der Periode* oder einfach *Periode*.

In der Figur ist die Periode durch die Strecken AA_1, mm_1, pp_1, ... dargestellt. Wenn man die Kurve um eine Strecke, welche gleich der Periode ist, parallel zur Achse verschiebt, so fällt die neue Kurve mit der früheren zusammen. In einer Periode hat man immer zwei Wechsel. Da die Dauer der Periode bei den in der Technik verwendeten Strömen stets ein sehr kleiner Bruchteil ($^1/_{20}$ bis $^1/_{100}$) einer Sekunde ist, so ist es bequemer, die Anzahl der vollständigen Perioden in der Sekunde anstatt der Dauer der Periode zu betrachten. Für diese Zahl wurde von dem internationalen Kongress in Paris (1889) der Name *Frequenz* adoptiert. Bezeichnet man mit T die Periode und mit n die Frequenz, so ist:

$$nT = 1, \qquad n = \frac{1}{T}.$$

Die Wechselzahl in der Zeiteinheit ist das doppelte der Periodenzahl, d. h. $= 2n$.

einander
ergeben-
liedenen
gestellt
Multi-
anderen

assend

Maximal-
Kurven
gegen-
der Lage

Augen-
Phase
alter-
derjenige

die Phase,
durch

alter-
nehmen, so
vollständig

der Figur dar-
die andere

Wahl des Ur-

den Bruchteil der
Reihe der Werte

bestimmt, wenn

finieren, bedarf es
auch der Kenntnis

der ganzen Reihe der von ihr angenommenen Werte, d. h. der Form der Linie, durch welche die Grösse dargestellt wird. Unter den unendlich vielen Werten einer alternierenden Grösse verdienen die Amplitude, der mittlere und der effektive Wert besondere Beachtung.

Die *Amplitude* ist der grösste Wert, welchen die Kurve enthält; sie besitzt, wie schon erwähnt, denselben absoluten Wert in dem positiven und in dem negativen Teile der Kurve.

Der *Mittelwert* für ein gegebenes Zeitintervall ist der Durchschnitt der Werte, welche die Grösse in diesem Intervall annimmt; derselbe wird durch

$$\frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} a\,dt$$

ausgedrückt, wobei mit a der Wert der alternierenden Grösse in einem beliebigen Moment und mit t_1 und t_2 die Werte der Zeit an den Enden des betrachteten Intervalles bezeichnet werden. Der Mittelwert ist also gleich der von der Kurve und der Abscissenachse eingeschlossenen Fläche, dividiert durch die Grundlinie. Im besonderen ist der Mittelwert a_m für das Intervall zwischen zwei aufeinander folgenden Wechseln, d. h. der Durchschnittswert von allen positiven Werten, die die Grösse annehmen kann,

$$a_m = \frac{2}{T} \int_{-\frac{\theta}{2}}^{+\frac{T}{2}-\theta} a\,dt,$$

wobei θ das Zeitintervall AO zwischen dem Anfangspunkt der Periode und dem Nullpunkt der Zeit bedeutet.

Der Mittelwert für eine ganze Periode oder für eine ganze Zahl von Perioden ist dagegen Null, weil der positive und der negative Flächeninhalt gleich sind.

Wenn man endlich den Mittelwert für eine beliebige Zeit betrachtet, so reduziert sich derselbe, da das Integral über die in der betrachteten Zeit eingeschlossenen ganzen Perioden gleich Null ist, auf den zwischen dem auf den übrig bleibenden Bruchteil der Periode ausgedehnten Integral und der ganzen bis zu dem betrachteten Zeitpunkt verstrichenen Zeit. Das Integral im Nenner stellt hierbei wieder den Flächeninhalt eines Teiles AMB der Kurve dar, welcher mit dem Zähler mit dem Wachsen der Zeit zunimmt. Demnach nähert sich der Mittelwert einer alternierenden Grösse, wenn er nicht für ein gewisses grosses Zeit[illegible] genommen wird, als Null angesehen werden [illegible] er alternierenden Grösse [illegible] nach einer [illegible]

Pariser Kongress (1889) adoptierten Benennung, die *Quadratwurzel aus dem Mittelwerte der Quadrate von allen den Werten, die die alternierende Grösse in einer ganzen Periode annimmt.* Bezeichnet $\mathscr{A}$ den effektiven Wert von a, so ist:

$$\mathscr{A}^2 = \frac{1}{T}\int_0^T a^2 dt.$$

Der effektive Wert hat dieselben Dimensionen wie die alternierende Grösse, und besitzt eine grössere Bedeutung als alle anderen betrachteten Werte, weil die effektiven Werte eben diejenigen sind, welche von den Wechselstrommessinstrumenten angegeben werden.

116. Sinoïdale alternierende Grössen. — Polare Darstellung, Summierung und Differentiation. — Es ist jener Fall bemerkenswert, in welchem die alternierende Grösse durch eine Sinuswelle dargestellt wird. Die Grösse heisst dann *sinoïdale alternierende Grösse* oder *einfach harmonische Grösse*.

Reine Sinuswellen treten zwar in der Praxis selten auf; dieser Fall ist jedoch besonders wichtig, weil er sich für eine einfache, mathematische Behandlung eignet, aus welcher sich die allgemeinen Eigentümlichkeiten der Wechselströme ergeben.

Der Wert, welchen eine sinoïdale alternierende Grösse a nach Verlauf der Zeit t (von einem bestimmten Nullpunkt aus gezählt) annimmt, wird durch den Ausdruck

$$a = A \sin \frac{2\pi}{T}(t + \theta)$$

dargestellt, worin T die Periode, θ das Zeitintervall zwischen dem Anfang der Periode und dem Nullpunkt der Zeit, daher $\frac{\theta}{T}$ die Phase, und endlich A die Amplitude (weil A eben der Maximalwert von a ist) bezeichnet.

Man kann ausserdem den Wert a als Funktion der Frequenz ausdrücken:

$$a = A \sin 2\pi n(t + \theta),$$

oder ferner, indem man $\alpha = 2\pi n\theta$ setzt:

$$a = A \sin(2\pi n t + \alpha).$$

Die einfach harmonische Grösse a ist also vollständig bestimmt, wenn deren Amplitude, Frequenz oder Periode und ferner ihre Phase gegeben sind. Um die Phase zu bestimmen, kann ebenso ihr Wert $\frac{\theta}{T}$, wie auch der Wert $\alpha = 2\pi\frac{\theta}{T}$ dienen, welch letzterer *Phasenwinkel* genannt wird

In einer Sinuswelle ist der Mittelwert für eine halbe Periode:

$$a_m = \frac{2}{T}\int_{-\theta}^{\frac{T}{2}-\theta} A \sin\frac{2\pi}{T}(t+\theta)\,dt = \frac{2}{\pi}A \tag{4}$$

und der effektive Wert*):

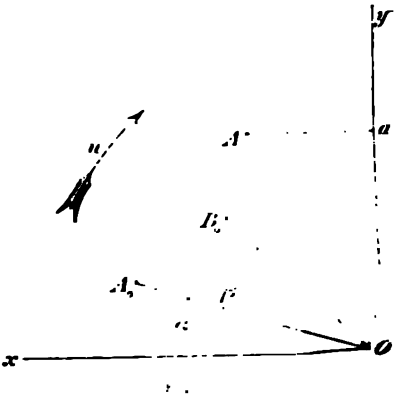
$$a^2 = \frac{1}{T}\int_0^T A^2 \sin^2\frac{2\pi}{T}(t+\theta)\,dt = \frac{A^2}{2}$$

d. h.

$$a = \frac{A}{\sqrt{2}}. \tag{5}$$

Ist ein beliebiger der drei Werte, der maximale, der mittlere, oder der effektive bekannt, so kann man leicht die anderen ermitteln.

Im Falle von Sinuswellen ist es zweckmässig, sich einer anderen graphischen Darstellungsweise, der sogenannten *polaren Darstellung* zu bedienen.



Es seien Ox und Oy (Fig. 123) zwei Orthogonalachsen; von O aus, in der Richtung, welche mit der x-Achse einen Winkel α gleich dem Phasenwinkel der darzustellenden alternierenden Grösse bildet, trage man eine Strecke OA_0 auf, deren Länge in einem bestimmten Massstabe die Amplitude A darstellt, und stelle sich vor, dass dieselbe, ihre Länge unverändert beibehaltend, um O in dem Sinne u mit der Frequenz n rotiert, d. h. auf die Weise, dass sie in der Zeit T eine Umdrehung und in der Zeit t n Umdrehungen vollendet.

Am Ende der Zeit t, von der anfänglichen Lage OA_0 an gerechnet, wird der Vektor die Lage OA angenommen haben, wobei OA_0 den Winkel

$$A_0OA = 2\pi nt$$

und folglich mit der x-Achse den Winkel

$$xOA = 2\pi nt + \alpha$$

bildet.

*) Wir werden allgemein den Momentan-, den Maximal- oder den Mittelwert einer alternierenden Grösse bezw. durch einen kleinen, den entsprechenden grossen Buchstaben in Druckschrift und durch einen gr... Buchstaben in Schreibschrift bezeichnen.

Pariser Kongress (1889) adoptierten Benennung, die
dem Mittelwerte der Quadrate von allen den Werten.
Grösse in einer ganzen Periode annimmt. Bezeich
Wert von a, so ist:

$$\mathfrak{A}^2 = \frac{1}{T}\int_0^T a^2 dt.$$

Der effektive Wert hat dieselben Dimensio
Grösse, und besitzt eine grössere Bedeutung al
Werte, weil die effektiven Werte eben diejen
Wechselstrommessinstrumenten angegeben we

**116. Sinoïdale alternierende Grössen. — P
und Differentiation.** — Es ist jener Fall
alternierende Grösse durch eine Sinuswell
heisst dann *sinoïdale alternierende Grösse*

Reine Sinuswellen treten zwar in
ist jedoch besonders wichtig, weil er sich
Behandlung eignet, aus welcher sich
der Wechselströme ergeben.

Der Wert, welchen eine sinoïd
lauf der Zeit t (von einem bestimmt
wird durch den Ausdruck

$$a = A$$

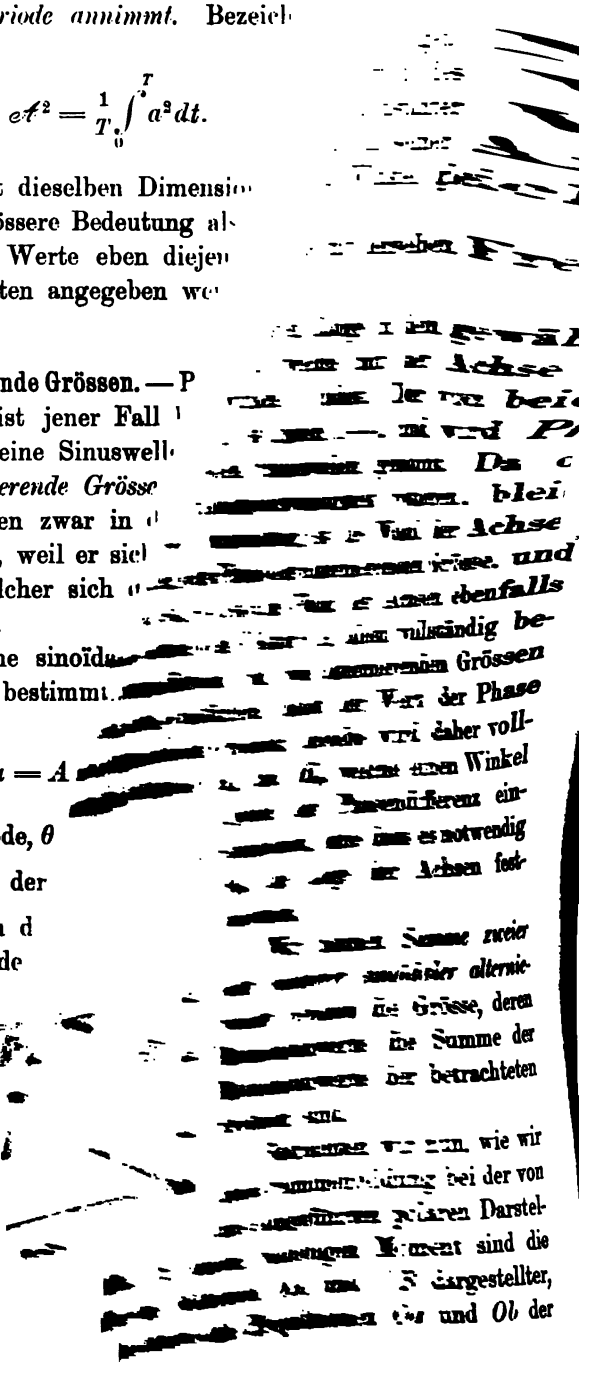
dargestellt, worin T die Periode, θ
Periode und dem Nullpunkt der
die Amplitude (weil A eben d

Man kann ausserdem de
drücken:

$$a =$$

oder ferner, indem man α

Die einfach harmonisc
deren Amplitude, Fre
sind. Um die Phase
der Wert $\alpha = 2\pi\frac{\theta}{T}$



[illegible]

$$= [illegible] \sin(2\pi n t + \alpha')$$

[illegible]

$$[illegible] = \alpha + \frac{\pi}{2}$$

[illegible] alquotient einer sinoïdalen alter- [illegible] ist ebenfalls eine Grösse derselben [illegible] Amplitude gleich der Amplitude der [illegible] multipliziert mit $2\pi n$ ist, und [illegible] Grösse um 90° in der Phase [illegible] Fig. 125) die Grösse a darstellt, [illegible] Differentialquotient a' durch den Vektor [illegible] dessen Länge $2\pi n \cdot \overline{OA}$ ist, und [illegible] einen Winkel von 90° bildet, wobei [illegible] ausgehend, die Winkel in dem Sinne [illegible] als positiv annimmt.

[illegible] in Stromkreisen mit Ohm'schem und in- [illegible] Nach den vorstehenden allgemeinen Betrach- [illegible] Grössen können wir nunmehr zu dem [illegible] für welche wir die Form einer [illegible]

[illegible] Betrachten wir zuerst einen voll- [illegible] Widerstand r und der Induktanz L, und [illegible] dass letztere als konstant angesehen [illegible] der Wert der E. M. K., welche in dem Strom- [illegible] demselben einen Wechselstrom von der

$$[illegible] \sin(2\pi n t + \alpha)$$

[illegible] auf den Stromkreis angewandt, giebt uns für [illegible] Beziehung:

$$[illegible] \cdot ri,$$

$$[illegible] \cdot ri,$$

$$[illegible] \cdot L \frac{[illegible]}{at}.$$

Die E.M.K. ist also die Summe der beiden alternierenden Grössen ri und $L\frac{di}{dt}$.

Indem wir beachten, dass r und L konstante Faktoren sind, und an die polare Darstellung einer einfach harmonischen Grösse und ihres Differentialquotienten uns erinnern, erhalten wir sogleich die Grösse ri dargestellt durch den in einer willkürlichen Richtung gezogenen Vektor von der Länge $OA = rI$ (Fig. 126) und die Grösse $L\frac{di}{dt}$ dargestellt durch den Vektor OB, welcher senkrecht zu OA steht, diesem um 90° voreilt und die Länge $OB = 2\pi nLI$ besitzt. Der aus OA und OB resultierende Vektor OC stellt die E.M.K. e dar; die Länge OC giebt uns nämlich die Amplitude E, und der Winkel $\alpha = \widehat{COA}$, welchen derselbe mit dem Vektor OA bildet, die Phasenvorlung, die er gegen die Stromstärke aufweist. Die E.M.K. ist also durch:

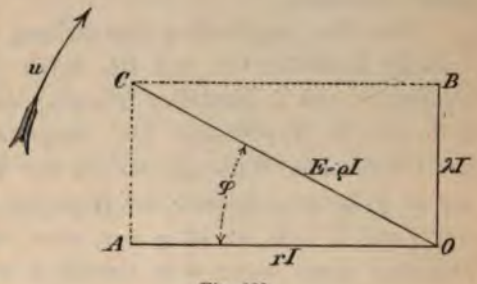


Fig. 126.

$$e = E\sin(2\pi nt + \alpha + \varphi)$$

usgedrückt.

Aus der Betrachtung des rechtwinkligen Dreiecks OAC folgt:

$$E^2 = r^2I^2 + (2\pi nL)^2 I^2,$$

nd daher ist, wenn man

3) $$\lambda = 2\pi nL \quad \text{und} \quad \varrho = \sqrt{r^2 + \lambda^2}$$

etzt:

7) $$E = \varrho I.$$

Aus der Formel (5) ergiebt sich, dass die Gleichung (7) ihre Giltigeit behält, wenn die Maximalwerte E und I durch die effektiven Werte und $\mathfrak{J}$ ersetzt werden.

Indem wir annehmen, dass L konstant sei, haben wir auch die Grösse als konstant zu betrachten. Folglich kann man sagen, dass eine Proportionalitätsbeziehung zwischen den Amplituden und mithin auch zwischen en effektiven Werten der E.M.K. und der Stromstärke in einem von Wechselstrom durchflossenen Stromkreise besteht, d. h. eine Beziehung nalog derjenigen, welche das Ohm'sche Gesetz für die Gleichströme ausrückt.

Den Faktor ϱ, welcher dem Widerstand entspricht, nennt man *cheinbaren Widerstand* oder *Impedanz des Stromkreises*; derselbe ist ab-

hängig von dem wirklichen Widerstand r (der auch reeller oder metallischer oder namentlich Ohmscher Widerstand genannt wird) und von der Größe λ, welche ihrerseits von der Induktanz abhängt und *induktiver Widerstand* oder *Reaktanz* genannt wird*).

Wenn der Ohmsche Widerstand r und der induktive λ gegeben sind, so kann man die Impedanz durch die oben abgeleiteten Beziehungen leicht ermitteln.

Aus der graphischen Darstellung der E. M. K. e kann man ersehen, daß die Katheten OA und AC durch eine einfache Massstabsänderung die Größen r und λ darstellen können; dann ist der scheinbare Widerstand ϱ durch die Hypotenuse OC dargestellt. Für einen bestimmten Wert des Ohmschen Widerstandes ist der Wert des scheinbaren Widerstandes um so größer, je größer der Wert der Induktanz in dem Stromkreise ist; wenn $L = 0$ ist, ist $\varrho = r$, aber im allgemeinen ist $\varrho > r$, und ihre Differenz kann sogar sehr erheblich sein, wenn die Induktanz gross ist.

Aus der graphischen Darstellung ergiebt sich sofort auch der Wert der Phasendifferenz zwischen e und i. Das rechtwinklige Dreieck OAC, dessen Winkel AOC gleich φ ist, giebt

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{\lambda}{r}, \quad \sin\varphi = \frac{\lambda}{\varrho}, \quad \cos\varphi = \frac{r}{\varrho}.$$

Für einen gegebenen endlichen Wert des Widerstandes r ist der Phasendifferenzwinkel φ gleich Null, wenn die Induktanz des Stromkreises gleich Null ist; ist L nicht Null, so hat φ einen bestimmten

*) Wir sehen, wie üblich bei der theoretischen Behandlung dieses Gegenstandes, von der Hysteresis ab und betrachten μ als unabhängig von der Stromstärke vorausgesetzt (was nicht zutrifft, wenn man annimmt, daß der Joule'sche Effekt die ganze in Wärme umgesetzte Energie darstelle, was allgemein nicht zutreffend ist. Die Permeabilität des Eisens hängt von dem Sättigungsgrade ab und mithin die Induktanz von der Stromstärke. Außerdem findet eine von uns als Energieverlust aufzufassende, und wesentlich von der molekularen Reibung (magnetischen und dielektrischen Hysteresis), von den Foucaultströmen und von den induzierten Strömen in benachbarten Leitern herrührende Umsetzung von Energie in Wärme statt.

Man kann, wie in obigem Falle die Formel $E = I\sqrt{r^2 + \lambda^2}$ als giltig betrachten, wenn man r und λ eine allgemeinere Bedeutung beilegen, wenn also unter r nicht mehr den *wahren*, mit Gleichstrom gemessenen Widerstand, sondern einen fiktiven, sich auf den gesamten Energieverlust beziehenden und durch die Formel $r = \frac{W}{i^2}$ bestimmten Widerstand (W die gesamte in Wärme umgesetzte Energie bedeutet) und die Größe λ in der Formel $E = I\sqrt{r^2 + \lambda^2}$ selbst definiert annehmen. Der Größen r und λ sind dann keine Konstanten des Stromkreises mehr. Wir werden diese Bezeichnungen angewandt, auch für das Folgende.

Wert, welcher mit dem Zunehmen von L wächst und dem Werte $\frac{\pi}{2}$ zustrebt, wenn L im Vergleich mit r unendlich gross wird; man sagt dann, dass beide Grössen in *Quadratur* zu einander stehen, die eine geht durch ihren Maximalwert hindurch, wenn die andere Null wird.

Für einen gegebenen Wert der Induktanz L ändert sich der Winkel φ mit dem Variieren des Ohm'schen Widerstandes des Stromkreises. Der Grenzwert für $r = 0$ ist $\varphi = \frac{\pi}{2}$; wenn r zunimmt, nimmt φ ab und strebt dem Werte Null zu, wenn r sehr gross wird. Man hat also zwei Grenzwerte für den Winkel φ; den Wert Null, wenn λ und folglich L im Vergleich zu r verschwindend klein sind, und den Wert $\frac{\pi}{2}$, wenn λ und L sehr gross gegen r sind. Im allgemeinen liegt der Wert von φ zwischen diesen extremen Werten.

2. *Teil eines Stromkreises.* — In einem Teile eines Stromkreises mit dem Widerstand r herrsche keine andere E. M. K. als diejenige, welche von der als konstant angesehenen Induktanz L herrührt. Wir wollen den Spannungsabfall, d. h. die Potentialdifferenz zwischen den Endpunkten des Teiles bestimmen, welche entsteht, wenn ein gewisser Wechselstrom den Stromkreis durchfliesst. — Das Ohm'sche Gesetz liefert uns für eine beliebige Zeit t die Beziehung:

$$v = ri + L\frac{di}{dt}.$$

Durch ähnliche Konstruktion, wie im vorigen Falle, finden wir den Vektor, welcher v darstellt, und wir können hier die damals angestellten allgemeinen Betrachtungen wiederholen.

Auch hier besteht zwischen den Amplituden und den effektiven Werten der Potentialdifferenz und der Stromstärke ein dem Ohm'schen ähnliches Gesetz:

$$V = \varrho I. \tag{7'}$$

Die Konstante ϱ ist der scheinbare Widerstand des betrachteten Teiles des Stromkreises und steht mit dem Ohm'schen Widerstand r und dem induktiven $\lambda = 2\pi n L$ in demselben Zusammenhang wie vorher:

$$\varrho = \sqrt{r^2 + \lambda^2}.$$

Die Potentialdifferenz besitzt eine Phasenvoreilung gegen die Stromstärke, deren Winkel durch die Formel (8) als eine Funktion von L und r gegeben wird.

3. *Verzweigte Stromkreise.* — Die oben ermittelten Beziehungen gestatten uns, das Problem der Stromverzweigung auch für den Fall der Wechselströme zu behandeln. Für die praktischen Anwendungen ist es nicht nötig, die Aufgabe in ihrer ganzen Allgemeinheit zu lösen; wir werden folglich nur den einfachen Fall betrachten, in welchem die Stromzweige Widerstand und Induktanz, aber keine merkliche gegenseitige Induktion aufweisen. Zwischen den Punkten A und B (Fig. 127) des Stromkreises seien die Zweige 1 und 2, welche bezw. die Ohm'schen Widerstände r_1 und r_2, die von den Induktanzen L_1 und L_2 herrührenden induktiven Widerstände λ_1 und λ_2 und die scheinbaren Widerstände ϱ_1 und ϱ_2 besitzen. Bezeichnen wir mit i die Stromstärke in dem unverzweigten Teile des Stromkreises, mit i_1 bezw. i_2 die Stärke der Zweigströme, mit v_a, v_b, $v = v_a - v_b$ bezw. die Werte des Potentials in A und B und der Potentialdifferenz zwischen A und B.

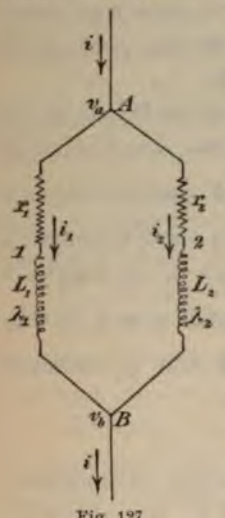


Fig. 127

Die Beziehung (7'), auf die beiden Zweige angewandt, giebt:

$$V = \varrho_1 I_1 = \varrho_2 I_2,$$

woraus folgt:

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{\varrho_2}{\varrho_1},$$

d. h:

Die maximalen und folglich auch die effektiven Werte der Stromstärke in den Zweigen verhalten sich umgekehrt wie die scheinbaren Widerstände der betreffenden Stromzweige.

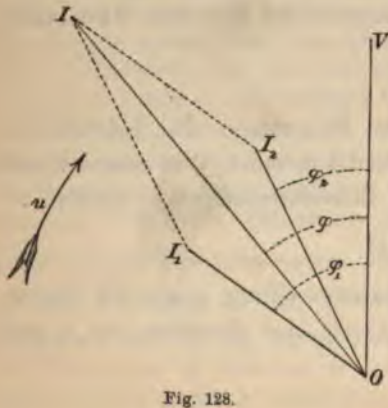


Fig. 128.

Indem wir die Annahme machen, dass in den Zweigen nur Ohm'scher und induktiver Widerstand vorhanden sein soll, giebt uns das Prinzip von der Erhaltung der Elektrizität oder, wenn wir wollen, der auf den Punkt A angewandte erste Kirchhoff'sche Satz:

$$i = i_1 + i_2.$$

Wenn der Vektor OV (Fig. 128), welcher die Potentialdifferenz v darstellt, bekannt ist, kann man durch die beschriebenen Konstruktionen die

Vektoren OI_1 und OI_2 ermitteln, welche die Zweigströme i_1 und i_2 darstellen; ihre Summe OI bildet die polare Darstellung des Hauptstromes i.

Wir können den algebraischen Ausdruck von i leicht finden. Bezeichnen φ_1, φ_2 und φ die Phasendifferenzen zwischen V und I_1 bezw. I_2 und I, so gilt:

$$(\alpha) \qquad \begin{cases} I\cos\varphi = I_1\cos\varphi_1 + I_2\cos\varphi_2 \\ I\sin\varphi = I_1\sin\varphi_1 + I_2\sin\varphi_2 \end{cases}$$

und durch Quadrierung und Summierung ergiebt sich:

$$I^2 = I_1^2 + I_2^2 + 2I_1I_2(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 + \sin\varphi_1\sin\varphi_2)$$
$$I^2 = I_1^2 + I_2^2 + 2I_1I_2\cos(\varphi_1 - \varphi_2).$$

Jeder der Winkel φ_1 und φ_2 liegt zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$, auch $\varphi_1 - \varphi_2$ ist $< \frac{\pi}{2}$, und folglich ist die Resultierende I immer grösser als jede einzelne der Komponenten I_1 und I_2. Man kann auch die Phasendifferenzen leicht berechnen. Durch Division der Gleichungen (α) Glied für Glied findet man die Beziehung:

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{I_1\sin\varphi_1 + I_2\sin\varphi_2}{I_1\cos\varphi_1 + I_2\cos\varphi_2},$$

welche uns die Phasendifferenz φ zwischen der Potentialdifferenz V und dem Hauptstrome I angiebt.

Die Phasendifferenz zwischen den beiden Zweigströmen ist durch die Gleichung:

$$\operatorname{tang}(\varphi_1 - \varphi_2) = \frac{\operatorname{tang}\varphi_1 - \operatorname{tang}\varphi_2}{1 + \operatorname{tang}\varphi_1\operatorname{tang}\varphi_2}$$

gegeben.

Man hat nun nur die aus den Gleichungen (7′) und (8) sich ergebenden Werte für I_1, I_2, φ_1 und φ_2 in diese Ausdrücke einzusetzen, um die verschiedenen Grössen als Funktionen der Potentialdifferenz v, der Ohmschen, induktiven und scheinbaren Widerstände, welche die Stromkreise definieren, zu ermitteln. Wenn man I in Funktion von V ausgedrückt hat, so giebt der Quotient $\frac{V}{I} = \varrho$ den gesamten scheinbaren Widerstand der beiden Zweige.

118. Einfluss der Kapazität in Wechselstromkreisen. — Veränderliche Ströme können auch in nicht vollständig geschlossenen Stromkreisen erzeugt werden, d. h. in Stromkreisen, welche nicht vollständig aus Leitern bestehen, sondern sich durch dielektrische Körper schliessen. In der That kann zwischen den beiden Enden des Stromkreises ein Verschiebungsstrom

3. *Verzweigte Stromkreise.* — Die oben ermittelten Bezie
statten uns, das Problem der Stromverzweigung auch für d
Wechselströme zu behandeln. Für die
Anwendungen ist es nicht nötig, die
ihrer ganzen Allgemeinheit zu lösen;
folglich nur den einfachen Fall betrachten,
die Stromzweige Widerstand und Indu
keine merkliche gegenseitige Induktion
Zwischen den Punkten A und B (Fig. 127)
kreises seien die Zweige 1 und 2, welch
Ohm'schen Widerstände r_1 und r_2, die
duktanzen L_1 und L_2 herrührenden indukt
stände λ_1 und λ_2 und die scheinbaren
ϱ_1 und ϱ_2 besitzen. Bezeichnen wir mit i
stärke in dem unverzweigten Teile des S
mit i_1 bezw. i_2 die Stärke der Zweigströ
v_b, $v = v_a - v_b$ bezw. die Werte des Pote
und B und der Potentialdifferenz zwischen

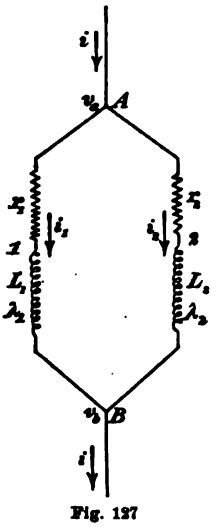


Fig. 127

Die Beziehung (7'), auf die beiden Zweige angewandt, gi

$$V = \varrho_1 I_1 = \varrho_2 I_2,$$

woraus folgt:

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{\varrho_2}{\varrho_1},$$

d. h:

Die maximalen und folglich auch die effektiven Werte der in den Zweigen verhalten sich umgekehrt wie die scheinbaren der betreffenden Stromzweige.

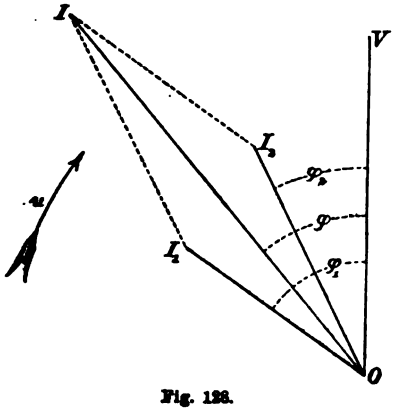


Fig. 128.

Indem wir die Annal
dass in den Zweigen nu
und induktiver Widerstan
sein soll, giebt uns das
der Erhaltung der Elek
wenn wir wollen, der auf
angewandte erste Kirchh

$$i = i_1 + i_2$$

Wenn der Vektor
welcher die F
stellt, be
die be

stattfinden, analog demjenigen, der im Dielektrikum eines Kondensators auftritt. Wenn die Belegungen eines Kondensators in Verbindung mit den Polen eines Elementes gebracht werden, findet im Dielektrikum eine elektrische Verschiebung statt, durch deren Einfluss der Kondensator sich auf eine Potentialdifferenz, welche der E. M. K. des Elementes gleich ist, ladet; dann hört jede Elektrizitätsströmung auf, weil Gleichgewicht zwischen der den Strom hervorbringenden E. M. K. und den Gegenwirkungen des Dielektrikums hergestellt ist. Besitzt dagegen die E. M. K. keinen konstanten Wert, sondern handelt es sich um eine alternierende Spannung, so entladet sich der Kondensator, nachdem er sich geladen hat, und ladet sich in entgegengesetztem Sinne u. s. w., d. h. es findet im Dielektrikum eine alternierende Verschiebung statt.

Im allgemeinen bilden die Enden eines unterbrochenen Stromkreises, ganz einerlei, wie sie beschaffen sind, die beiden Belegungen eines Kondensators, dessen Kapazität von den Dimensionen der Enden selbst und von der Dicke und Natur des dazwischenliegenden Dielektrikums abhängt.

Suchen wir die Wirkung eines Kondensators in einem Wechselstromkreise festzustellen, und betrachten wir dabei einen beliebigen Stromkreis, in welchen ein Kondensator mit der Kapazität C eingeschaltet ist. Bezeichnen wir mit i den Momentanwert des Wechselstromes, dessen positive Richtung die vom Pfeile angedeutete (Fig. 129) sein soll, mit v_1 und v_2 die Momentanwerte des Potentials auf den Belegungen und ferner mit $v = v_1 - v_2$ die Potentialdifferenz zwischen denselben in dem betrachteten Moment.

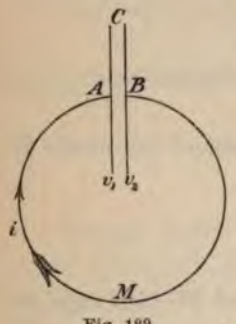


Fig. 129.

Da i die Stromstärke in dem Leiter BMA ist, so geht in der unendlich kurzen Zeit dt durch jeden Querschnitt des Leiters eine Elektrizitätsmenge $i\,dt$, welche auch auf die Belegung A gelangt, d. h. die Ladung des Kondensators nimmt in der Zeit dt um $i\,dt$ zu. Es kann nun aber die Zunahme der Ladung des Kondensators auch durch das Produkt $C\,dv$ ausgedrückt werden, wobei dv die Zunahme der Potentialdifferenz zwischen den Belegungen in der Zeit dt bezeichnet. Durch Gleichsetzen dieser beiden Ausdrücke für dieselbe Ladung erhält man:

$$i\,dt = C\,dv,$$

woraus folgt:

$$i = C\frac{dv}{dt}. \tag{9}$$

Die Intensität des Wechselstromes in einem Stromkreise, welcher einen Kondensator enthält, wird durch das Produkt der Kapazität des Konden-

sators mit dem nach der Zeit gebildeten Differentialquotienten der Potentialdifferenz zwischen den Belegungen dargestellt.

Variiert die Potentialdifferenz zwischen den Belegungen nach der Gleichung:

$$v = V \sin(2\pi n t + \alpha),$$

so ist i ebenfalls eine einfach harmonische Grösse mit der Amplitude:

$$I = 2\pi n C V,$$

und weist gegen die Potentialdifferenz eine Phasenvoreilung von $\frac{\pi}{2}$ auf.

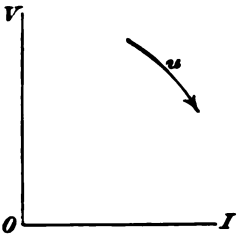


Fig. 130.

Wenn der die Potentialdifferenz v darstellende Vektor OV (Fig. 130) gegeben ist, so kann sofort der Vektor, welcher i darstellt, ermittelt werden, indem man eine Strecke OI von der Länge $2\pi n C \cdot OV$ zieht, welche dem Vektor OV um 90° voreilt. Durch die umgekehrte Konstruktion wird man, wenn der i darstellende Vektor gegeben ist, den Vektor finden können, welcher die Potentialdifferenz zwischen den Belegungen des Kondensators angiebt.

119. Wechselstromkreise mit Widerstand, Induktanz und Kapazität. — In einem Wechselstromkreise seien die Grössen gegeben, welche den Stromkreis definieren, namentlich die Werte des Widerstandes r, der Induktanz L und der Kapazität C; es soll nun die E. M. K. bestimmt werden, welche im Stromkreise wirken muss, um einen Strom von gegebener Stärke durch denselben fliessen zu lassen.

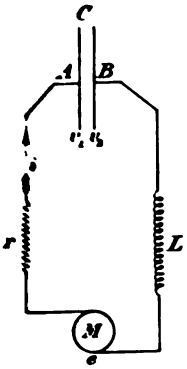


Fig. 131.

Bezeichnen wir mit i, e, v_1, v_2 die Momentanwerte der Stromstärke, bezw. der E. M. K. und der Potentiale auf den Belegungen A und B des Kondensators (Fig. 131), und sehen wir als positive Richtung des Stromes diejenige an, welche von dem Pfeile i angedeutet wird.

Das Ohm'sche Gesetz, für den Leiter $BLMrA$ angewandt, giebt uns:

$$v_2 - v_1 + e - L\frac{di}{dt} = ri,$$

woraus sich, indem man $v_1 - v_2 = v$ setzt, ergiebt:

$$e = ri + L\frac{di}{dt} + v.$$

Wenn der Vektor OA (Fig. 132) von der Länge $OA = rI$ den Wert ri darstellt, so stellt der demselben um 90° voreilende Vektor von der Länge $OB = 2\pi nLI$ den Wert $L\frac{di}{dt}$ und der entgegengerichtete Vektor OC von der Länge $OC = \frac{I}{2\pi nC}$ den Wert v dar.

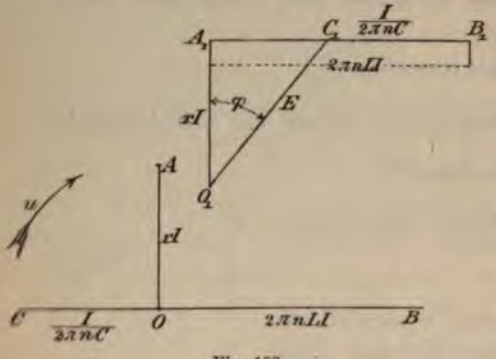


Fig. 132.

Setzt man diese drei Vektoren mittels der Polygonallinie $O_1A_1B_1C_1$ zusammen, so giebt die Seite O_1C_1, welche das Polygon schliesst, die E. M. K. e an, die wir finden wollten; die Länge O_1C_1 giebt die Amplitude E, der Winkel $A_1O_1C_1$ die Phasendifferenz zwischen e und i an.

Die analytischen Ausdrücke von E und φ lassen sich leicht ermitteln. Aus dem rechtwinkligen Dreieck $O_1A_1C_1$ ergiebt sich:

$$\overline{O_1C_1}^2 = \overline{O_1A_1}^2 + \overline{A_1C_1}^2 = \overline{O_1A_1}^2 + (A_1B_1 - B_1C_1)^2.$$

Nun ist:

$$O_1C_1 = E, \qquad O_1A_1 = rI,$$
$$A_1B_1 = 2\pi nLI, \qquad B_1C_1 = \frac{I}{2\pi nC},$$

und folglich:

$$E^2 = r^2I^2 + \left(2\pi nL - \frac{1}{2\pi nC}\right)^2 I^2.$$

Wenn man ferner

$$(10) \qquad \begin{cases} 2\pi nL - \frac{1}{2\pi nC} = A \\ \sqrt{r^2 + A^2} = \mathsf{P} \end{cases}$$

setzt, so kann man auch schreiben:

$$(11) \qquad E = \mathsf{P}I.$$

Dieselbe Beziehung, die hier für die Maximalwerte ermittelt worden ist, gilt auch für die effektiven Werte. Bei der Annahme, dass L einen konstanten Wert habe, ist P ebenfalls eine Konstante; folglich besteht auch in diesem allgemeinen Falle eine dem Ohm'schen Gesetze analoge Beziehung zwischen den maximalen oder den effektiven Werten der E. M. K. und der Stromstärke. Dem konstanten Faktor P, welcher die Stelle des Widerstandes in dem Ohm'schen Gesetze einnimmt, giebt

[illegible] den Namen *Impedanz* [illegible] *Widerstand* des Strom[illegible] derselbe hängt nicht [illegible] Widerstande, son[illegible] auch von der Induktanz [illegible] Die Grösse [illegible] man *Reaktanz* des [illegible] winkligen Dre[illegible] kann man auch [illegible]

tang α = [illegible]

[illegible] Vergleichung [illegible] den Formel[illegible] [illegible] Kapazität [illegible] [illegible] Vorzeichen [illegible] Das Ve[illegible] [illegible] in der [illegible] Induktanz [illegible] verursacht, [illegible] folglich [illegible] en Wider[illegible] [illegible] wenn [illegible] die Poten[illegible] [illegible] metallisch [illegible] [illegible] den [illegible]

r
n
e
d
zt
k-
C_1
en
n-
ke
nt,
ler
ge
gie
ull
bei-
sich
eine
rgie
age,
nur
sitzt.
hem
chen
uier-
ehrt.
Hat

der Punkt C_1 links von A_1. In diesem Falle ist die Reaktanz A negativ, foglich ist auch der Winkel φ negativ, und die Werte der E. M. K. eilen denen der Stromstärke nicht vor, sondern bleiben dagegen zurück; die Wirkung der Kapazität überwiegt diejenige der Induktanz.

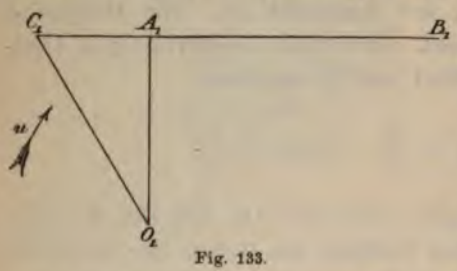


Fig. 133.

Die Phasenverzögerung von e gegen i wächst mit dem Ausdrucke $\frac{1}{2\pi nC}$, d. h. mit dem Abnehmen des Wertes der Kapazität.

In einem Wechselstromkreise kann man also durch Veränderung der Induktanz und der Kapazität die Phasendifferenz zwischen der E. M. K. und der Stromstärke ganz beliebig zwischen den Grenzen $+\frac{\pi}{2}$ und $-\frac{\pi}{2}$ sich ändern lassen; man hat eine Phasenvoreilung von e gegen i, deren Wert nahezu $\frac{\pi}{2}$ beträgt, wenn die Induktanz sehr gross ist, und dagegen eine Phasenverzögerung, deren Wert nahezu $\frac{\pi}{2}$ beträgt, wenn die Kapazität sehr klein ist.

III. Es erübrigt noch, den dazwischenliegenden Fall zu betrachten, in welchem

$$\frac{1}{2\pi nC} = 2\pi nL \quad \text{oder} \quad 4\pi^2 n^2 LC = 1 \tag{13}$$

ist.

Der Punkt C_1 (Fig. 134) fällt dann mit A_1 zusammen, weil $B_1C_1 = A_1B_1$. In diesem Falle ist $\varphi = 0$ und $\mathsf{P} = r$, d. h. es ist keine Phasendifferenz zwischen der E. M. K. und der Stromstärke vorhanden; der scheinbare Widerstand hat den kleinsten möglichen Wert, d. h. die Stromstärke hat bei einer gegebenen E. M. K. den grössten Wert, oder die E. M. K. ist bei einem gegebenen Werte der Stromstärke am kleinsten. Dieselbe Wirkung würde man in einem Stromkreise mit demselben Ohm'schen Widerstand, aber ohne Reaktanz haben; die Wirkungen der Induktanz und der Kapazität heben sich gegenseitig auf. In einem Wechselstromkreise, ganz einerlei, wie gross die Werte von L und C sind, wird man immer die eben betrachteten

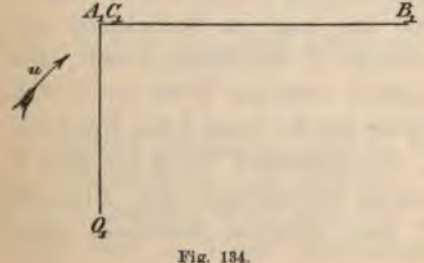


Fig. 134.

Erscheinungen beobachten können, wenn nur die Frequenz des Stromes eine solche ist, dass sie der Gleichung (13) genügt, d. h. wenn

$$(14) \qquad \begin{cases} n = \dfrac{1}{2\pi}\dfrac{1}{\sqrt{LC}} \\ T = 2\pi\sqrt{LC}. \end{cases}$$

120. Elektrische Resonatoren. — Ein Stromkreis, welcher einen sehr kleinen Widerstand besitzt und der Gleichung (13) genügt, kann von einem Strome mit erheblicher Stärke durchflossen werden, auch wenn die auf ihn wirkende E. M. K. klein ist.

Betrachten wir den Grenzfall, in welchem der Ohm'sche Widerstand gleich Null ist; dann ist $Ir = 0$, und $L\frac{di}{dt}$ und v sind entgegengesetzt gleich. In der im vorigen Abschnitte behandelten Konstruktion des Vektors O_1C_1, welcher die E. M. K. darstellt, fallen die Punkte O_1, A_1 und C_1 zusammen, während $O_1B_1 = B_1C_1$ einen gewissen von Null verschiedenen Wert besitzt. Es folgt daraus, dass, obwohl keine E. M. K. im Stromkreise vorhanden ist, weder die Potentialdifferenz V noch die Stromstärke J Null sind.

Dieses Ergebnis, welches auf den ersten Blick paradox erscheint, genügt dagegen den Forderungen des Prinzips von der Erhaltung der Energie vollständig. In dem betrachteten Stromkreise findet eine stetige und periodische Umwandlung von magnetischer in elektrische Energie statt, und umgekehrt, eine Umwandlung, welche, da der Widerstand Null ist, ohne Energievergeudung vor sich gehen kann.

Die Mechanik bietet Beispiele solcher Transformationen. Wenn beispielsweise ein Pendel im Felde der Schwere schwingt, ohne dass sich ein passiver Widerstand seiner Bewegung entgegensetzt, so findet eine kontinuierliche Umsetzung von potentieller Energie in kinetische Energie und umgekehrt statt, derart, dass das Pendel in der höchsten Lage, welche der grössten Abweichung von der Mittellage entspricht, nur potentielle, in der tiefsten oder Mittellage nur kinetische Energie besitzt.

In ähnlicher Weise ist ein vollkommen elastischer Körper, in welchem eine erste Deformation erzeugt wird, fortdauernd entgegengesetzt gleichen Deformationen periodisch unterworfen; man hat auch hier eine kontinuierliche Umwandlung von kinetischer in potentielle Energie und umgekehrt.

Ganz analog ist die eben betrachtete elektrische Erscheinung. Hat man dem Kondensator eine Ladung erteilt, so ist eine gewisse elektrische potentielle Energie in demselben aufgespeichert; die Potentialdifferenz zwischen den beiden Belegungen bringt im Stromkreise einen Strom und folglich eine magnetische Energie hervor, infolge dessen entgegengesetzte

E. M. KK. entstehen, welche veranlassen, dass der Kondensator auf eine der vorigen entgegengesetzten Potentialdifferenz geladen wird. Dieselben Erscheinungen wiederholen sich darauf in umgekehrtem Sinne, und dieser Wechsel setzt sich periodisch weiter fort. Man hat also eine fortgesetzte Umsetzung von elektrischer in magnetische Energie, bei welcher unter der Annahme, dass $r = 0$, die Energievergeudung gleich Null ist. Ist die elektrische potentielle Energie am grössten, d. h. ist die Potentialdifferenz v ein Maximum, dann ist die Stromstärke i, welche, wie gesagt, in Quadratur mit v ist, gleich Null, und folglich ist auch die magnetische Energie gleich Null; umgekehrt ist die magnetische Energie ein Maximum und die elektrische gleich Null, wenn i ein Maximum und v gleich Null ist.

Da die Transformation einer Energieform in die andere vollständig ist, so müssen die Werte der beiden Arten der Energie einander gleich sein.

Die gesamte magnetische Energie ist (3):

$$\frac{1}{2} L I^2,$$

die gesamte elektrische Energie ist (8′) [41]:

$$\frac{1}{2} \frac{q^2}{C},$$

worin q die Gesamtladung des Kondensators, d. h. die gesamte Elektrizitätsmenge, die in einer Viertelperiode den Stromkreis durchfliesst, bedeutet. Setzen wir die Phase von i gleich Null voraus, setzen wir nämlich:

$$i = I \sin 2\pi n t,$$

so ist:

$$q = \int_0^{\frac{T}{4}} i dt = I \int_0^{\frac{T}{4}} \sin 2\pi n t dt = \frac{I}{2\pi n}.$$

Die gesamte elektrische Energie ist also:

$$\frac{1}{2} \frac{q^2}{C} = \frac{1}{2} \frac{I^2}{4\pi^2 n^2 C}.$$

Indem man die Werte der magnetischen und der elektrischen Energie einander gleich setzt, erhält man:

$$\frac{1}{2} L I^2 = \frac{1}{2} \frac{I^2}{4\pi^2 n^2 C},$$

d. h.:

$$4\pi^2 n^2 L C = 1.$$

Man gelangt somit wieder zu der bei Beginn des Studiums der Erscheinung vorausgesetzten Bedingungsgleichung (13).

Es genügt also, in dem betrachteten System einmal einen Wechselstrom mit der Frequenz n zu erzeugen, damit derselbe unendlich lange

fortbestehe. Praktisch kann man ein solches System nicht herstellen, da es unmöglich ist, den Widerstand des Stromkreises zu Null zu machen; wir können aber immer Stromkreise unter Bedingungen betrachten, die den hier angenommenen sehr nahe kommen, wenn der Widerstand klein und die Beziehung (13) erfüllt ist.

Lassen wir auf einen solchen Stromkreis auf irgend welche Weise in rhythmischer Folge periodische, wenn auch sehr kleine E. M. KK. mit derselben Frequenz wirken, so addieren sich die Wirkungen dieser E. M. KK., ebenso wie bei einem Pendel sich die Impulse addieren, welche in demselben Rhythmus, mit welchem das Pendel schwingt, gegeben werden, und wie die Schwingungen einer vibrierenden Saite durch Schwingungen von Saiten vergrössert werden, welche mit derselben in Einklang schwingen. Wegen der Analogie mit dem entsprechenden Vorgang in der Akustik nennt man einen Stromkreis, welcher den angegebenen Bedingungen genügt, einen *elektrischen Resonator*.

In einem Resonator addieren sich die Schwingungen, die einen bestimmten Rhythmus besitzen, und können Schwingungen von grösserer Amplitude hervorbringen; ist einmal in einem Resonator eine gewisse Schwingung erzeugt worden, so setzt dieselbe sich von selbst fort, ohne dass E. M. KK. weiter wirken müssen, und würde unendlich lange fortdauern, wenn man den theoretischen Fall eines Resonators verwirklichen könnte, welcher keinen Ohm'schen Widerstand besässe.

Die Formeln (14) bestimmen für jeden Resonator die Frequenz und die Periode der Schwingungen, bei welchen er resonieren kann. Durch Änderung der Induktanz und der Kapazität des Stromkreises kann man die Frequenz und die Periode nach Belieben variieren. Je kleiner die Induktanz und die Kapazität sind, desto kleiner ist die Periode und desto grösser die Frequenz.

121. Potentialdifferenz zwischen zwei Punkten eines Wechselstromkreises. — In einen Teile AB des Stromkreises (Fig. 135) sei ein Kon-

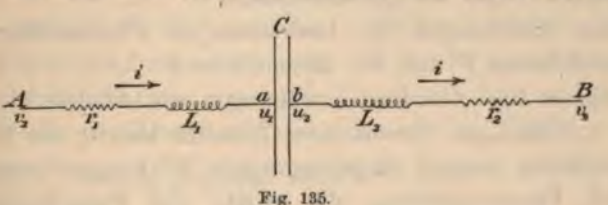


Fig. 135.

densator von der Kapazität C eingeschaltet. Bezeichnen wir bezw. mit r_1, L_1, r_2, L_2 den Ohm'schen Widerstand und die Induktanz der Strecken Aa und bB. In dem Teile AB des Stromkreises herrsche keine andere E. M. K.

Wenn dagegen $\frac{1}{2\pi nC} > 2\pi nL$ ist, überwiegt der Einfluss der Kapazität, und i eilt in der Phase der Potentialdifferenz vor.

Wenn endlich $\frac{1}{2\pi nC} = 2\pi nL$ ist, so heben sich die Wirkungen der Kapazität und der Induktanz auf; man hat keine Phasendifferenz zwischen e und i, und die Impedanz besitzt ihren kleinsten Wert $\mathsf{P} = r$.

122. Stromverzweigung. — Betrachten wir zwei Zweige 1 und 2 (Fig. 136). Der Zweig 1 besitze den Ohm'schen Widerstand r und die Induktanz L, der Zweig 2 die Kapazität C.

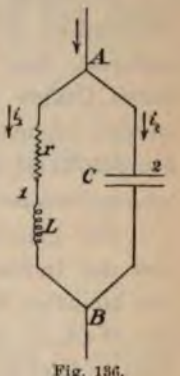


Fig. 136.

Im Zweige 1 ist $C = \infty$, und folglich ist

$$\Lambda_1 = \lambda = 2\pi nL, \qquad \mathsf{P}_1 = \varrho = \sqrt{r^2 + \lambda^2};$$

im Zweige 2 dagegen ist $r = 0$, $L = 0$ und folglich

$$\Lambda_2 = -\frac{1}{2\pi nC}, \qquad \mathsf{P}_2 = \frac{1}{2\pi nC}.$$

Der scheinbare Widerstand P_2, welcher gleich $\sqrt{\Lambda_2^2}$ ist, wurde mit dem Vorzeichen $+$ angenommen, weil derselbe, wie der Ohm'sche, von Natur aus positiv ist.

Wenn die Potentialdifferenz V zwischen den Punkten A und B gegeben ist, erhält man sofort die Werte der Stromstärken in den Zweigen aus den Gleichungen:

$$I_1 = \frac{V}{\varrho}, \qquad I_2 = \frac{V}{\mathsf{P}_2} = 2\pi nCV$$

und als deren Phasenschiebung gegen V die Werte:

$$\operatorname{tang} \varphi_1 = \frac{\lambda}{\varrho}; \qquad \operatorname{tang} \varphi_2 = \frac{\Lambda_2}{r_2} = -\infty, \qquad \varphi_2 = -\frac{\pi}{2}.$$

Stellt OV (Fig. 137) die Potentialdifferenz dar, so sind die Zweigströme bezw. durch den Vektor OI_1, welcher gegen die Potentialdifferenz um den Winkel φ_1 zurückbleibt, und durch den Vektor OI_2, welcher der Potentialdifferenz um den Winkel $\frac{\pi}{2}$ voreilt, gegeben. Der resultierende Vektor OI stellt den Hauptstrom dar.

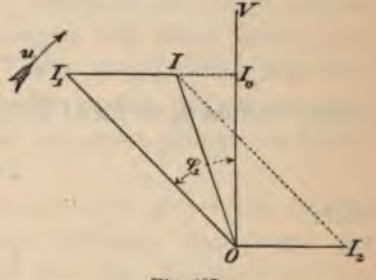


Fig. 137.

Es ist wichtig, zu beachten, wie in diesem Falle im Gegensatze zu dem Falle des vollständigen Fehlens von Kondensatoren zwischen den

Zweigströmen eine Phasendifferenz vorhanden ist, deren Wert zwischen $\frac{\pi}{2}$ und π liegt.

Aus dieser Thatsache ergiebt sich eine andere wichtige Eigentümlichkeit: der Hauptstrom kann eine Amplitude OI, kleiner als die Amplitude OI_1 des Stromes im Zweige 1 haben. Dies wäre ohne das Vorhandensein von Kondensatoren nicht möglich.

In einem Teile AB eines Stromkreises, welcher eine gegen den Ohm'schen Widerstand r sehr grosse Induktanz L besitzt, kann man dadurch, dass man A und B mit den Belegungen eines Kondensators durch Drähte verbindet, deren Induktanz und Widerstand vernachlässigt werden können, eine gegebene Stromstärke I_1 erreichen, wenn auch im übrigen Teile des Stromkreises nur eine kleinere, doch in gewisse Grenzen eingeschlossene Stromstärke I herrscht.

Bei gegebenen Werten der Stromstärke (I_1), des Widerstandes (r) und der Induktanz (L) des Teiles AB des Stromkreises wollen wir nun den kleinsten Wert I_0 des Hauptstromes suchen, welcher uns noch gestattet, den Wert I_1 der Stromstärke in AB zu erhalten und die Kapazität des dazu notwendigen Kondensators.

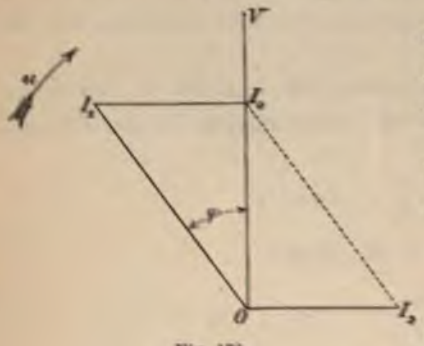


Fig. 138.

Es sei (Fig. 138) OV die Potentialdifferenz zwischen den Punkten A und B, OI_1 die in AB gewünschte Stromstärke und φ ihre Phasendifferenz.

Wie einleuchtend, ist der kleinste Wert von I die Projektion von I_1 auf V, nämlich OI_0, d. h.:

$$I_0 = I_1 \cos\varphi = V\frac{r}{\varrho^2}.$$

In dem Zweige, der den Kondensator enthält, muss die Stromstärke den Wert:

$$I_2 = I_1 \sin\varphi = V\frac{\lambda}{\varrho^2}$$

haben, und da $I_2 = 2\pi n C V$ ist, so ist die Kapazität durch die Beziehung:

$$2\pi n C V = V\frac{\lambda}{\varrho^2}$$

oder:

$$2\pi n C = \frac{\lambda}{\lambda^2 + r^2}$$

gegeben.

Die Kapazität des Kondensators hängt also von r und von λ ab.

Besitzt der Stromkreis keine Induktanz, so ist $\lambda = 0$, $I_0 = I$ und

$C = 0$. Man kann folglich in AB einen grösseren Strom als den Hauptstrom nicht erreichen.

Wenn im Teile AB der Ohm'sche Widerstand r sehr gross im Vergleich zu dem induktiven Widerstand λ ist, so ist $I_0 = I_1$ und $C = 0$; auch hier ist es nicht möglich, die gewünschte Wirkung zu erlangen.

Bei einem gegebenen Werte des induktiven Widerstands λ wird mit der Verringerung des Ohm'schen Widerstands r eine grössere Wirkung erzielt, weil der Winkel φ zunimmt; als Grenzwert, für den Fall, dass r verschwindend klein im Vergleich zu λ ist, hat man:

$$\varphi = \frac{\pi}{2}, \qquad I_0 = 0,$$

und die Beziehung, welche die Kapazität im Parallelzweige bestimmt, ist:

$$2\pi n C = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{2\pi n L}$$

oder:

$$4\pi^2 n^2 L C = 1.$$

In diesem Falle fliesst also in dem Zweige AB ein Strom I_1, welcher eine beliebig grosse Intensität besitzen kann, obwohl die Stromstärke I_0 in dem Hauptstromkreise sehr klein ist. Der Strom I_2 im Kondensator ist entgegengesetzt gleich dem Strome I_1, d. h. die beiden Ströme I_1 und I_2 bilden einen einzigen Strom, welcher den aus den beiden Zweigen bestehenden Stromkreis durchfliesst. Dieses System bildet einen wirklichen Resonator, und genügt, wie aus der eben gegebenen Beziehung ersichtlich ist, der Gleichung (13) für die Resonatoren. Wenn der Widerstand r gleich Null ist, so besteht der Strom, nachdem er einmal erzeugt worden ist, unendlich lange fort; wenn man andere, selbst sehr kleine Ströme I_0 wirken lässt, unter der Bedingung, dass dieselben die gleiche Frequenz und dieselbe Phase wie der erste besitzen, so summieren sich ihre Wirkungen im Stromkreise. Wir finden so auf einem anderen Wege wieder die Eigenschaften der Resonatoren und sehen ferner, dass die synchronen Schwingungen nicht nur durch die Wirkung von sehr kleinen E. M. KK. auf den Resonator erzeugt werden können, sondern auch dadurch, dass man in dieselben Ströme von ganz geringer Intensität schickt.

Diese Betrachtungen haben nicht nur eine sehr grosse theoretische Wichtigkeit, sondern auch eine unmittelbare praktische Bedeutung. Sie erklären die Wirkungsweise der Induktanz und der Kapazität in den Wechselstromkreisen und heben die Vorteile hervor, die man in industriellen Betrieben durch die Anwendung von Kondensatoren in Parallelschaltung erreichen kann.

Die industriellen Apparate für die Verwertung der Wechselstr können Widerstände, Induktanzen und E. M. KK. besitzen. Im allgemei besteht zwischen der Potentialdifferenz V an den Klemmen des Appar und dem Strome I, der ihn durchläuft, eine Phasendifferenz, deren W von der Induktanz und der E. M. K. im Apparat abhängt. Vermittels e parallel geschalteten Kondensators kann man bewirken, dass das Verteilu netz nicht den ganzen Strom I_1 liefern muss, sondern nur den Strom welcher die gleiche Phase wie V besitzt; der Strom $\overline{I_0 I_1}$, der in Quadr mit V ist, wird von dem passend berechneten Kondensator geliefert.

123. Arbeit eines Wechselstromes. — Es seien in einem Teile ei Wechselstromkreises zu einer bestimmten Zeit t

$$i = I \sin 2\pi n t$$
$$v = V \sin (2\pi n t + \varphi)$$

die Werte der Stromstärke und der Potentialdifferenz zwischen den End

Die vom Strome in der Zeit dt geleistete Arbeit ist

$$vidt$$

und in einer ganzen Periode:

$$\int_0^T vidt.$$

Der Mittelwert der Arbeit in einer Periode oder, wenn wir wollen, einer sehr grossen Zeit, nämlich die in der Zeiteinheit geleistete Arb ist also:

$$w = \frac{1}{T}\int_0^T vidt.$$

Durch Einsetzen der Werte für v und i erhält man:

$$w = \frac{VI}{T}\int_0^T \sin 2\pi n t \sin (2\pi n t + \varphi) dt$$

und durch Integration:

$$w = \frac{VI}{2} \cos \varphi,$$

woraus schliesslich, unter Berücksichtigung der Formel (5), folgt:

(15) $$w = \mathfrak{V}\mathfrak{J} \cos \varphi.$$

In analoger Weise berechnet sich die in der Zeiteinheit in ein vollständigen Stromkreise, auf welchen eine einfach harmonische E. M. e wirkt, geleistete Arbeit:

(15′) $$w = \mathfrak{E}\mathfrak{J} \cos \varphi.$$

Es genügt also für die Berechnung der Wechselstromarbeit nicht, die beiden Faktoren Stromstärke und Potentialdifferenz bezw. E. M. K. zu berücksichtigen, sondern man muss auch ihre Phasendifferenz in Rechnung ziehen. Man nennt das Produkt $\mathfrak{V}\mathfrak{J}$ oder $\mathfrak{E}\mathfrak{J}$ *scheinbare Arbeit;* dieselbe stimmt mit der *wirklichen Arbeit* w nur in dem Falle überein, dass der Strom die nämliche Phase besitzt wie die Potentialdifferenz oder die E. M. K. Besitzt der Stromkreis oder der in Betracht kommende Teil des Stromkreises keine weiteren E. M. KK. ausser der E. M. K. e, welche den Strom erzeugt, und derjenigen, welche von der Induktanz herrührt, so sind $\mathfrak{V}$ und $\mathfrak{E}$ die Summe der beiden unter sich senkrechten Vektoren $r\mathfrak{J}$ und $\lambda\mathfrak{J}$, und man hat daher:

$$\left.\begin{matrix}\mathfrak{V}\cos\varphi\\ \mathfrak{E}\cos\varphi\end{matrix}\right\} = r\mathfrak{J}$$

und folglich:

$$w = r\mathfrak{J}^2.$$

Die ganze vom Strome geleistete Arbeit wird in Wärme umgesetzt; sie hängt nur von dem Ohm'schen Widerstand r und nicht von dem induktiven λ ab. Es giebt also einen charakteristischen Unterschied zwischen dem Ohm'schen und dem induktiven Widerstand, welche gleichwertig sind, so lange man nur den von einem Strome hervorgebrachten Potentialabfall betrachtet, aber nicht mehr in bezug auf die Arbeit. Die Induktanz des Stromkreises übt auf die Energieverwandlung in Form von Wärme keinen Einfluss aus.

Durch einen Ohm'schen Widerstand kann man in einem Stromkreise keine Verminderung der Stromstärke ohne Energievergeudung erreichen; ein induktiver Widerstand bringt dagegen eine Verminderung der Stromstärke ohne Verzehrung von Arbeit hervor. Zu diesem Zwecke werden in der Praxis Spiralen, auf Eisenkerne gewickelt, verwendet, welche geringe Reluktanz besitzen und *Drosselspulen* genannt werden.

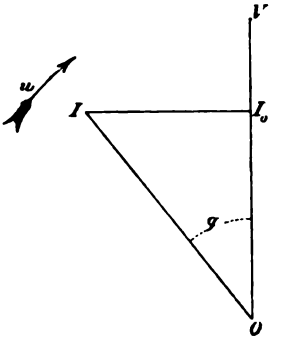


Fig. 139

Dieselbe Betrachtung kann man auch von einem anderen Gesichtspunkte aus anstellen. Der Strom I (Fig. 139) kann als resultierend aus dem Strom I_0, der in der Phase mit V oder mit E übereinstimmt, und aus dem Strome $I_0 I$, der um $\frac{\pi}{2}$ dagegen zurückbleibt, angesehen werden. Nun ist:

$$\mathfrak{J}_0 = \mathfrak{J}\cos\varphi$$

und folglich:

$$w = \begin{cases} \mathcal{V}\,\mathcal{J}_0 \\ \mathcal{E}\,\mathcal{J}_0 \end{cases}$$

Die geleistete Arbeit hängt also nur von der Stromkomponenten ab, welche in der Phase mit der E. M. K. übereinstimmt; der Strom in Quadratur ist ein *effektloser* Strom, der keine Arbeit leistet, dessen Wattzahl also gleich Null ist (weshalb er auch oft, aber unzweckmässig, als „wattloser Strom" bezeichnet wird).

Diese Betrachtungen sind von grossem Belang für die praktischen Nutzanwendungen der Wechselströme. In einem industriellen Apparat wird im allgemeinen die Phasendifferenz zwischen V und I durch einen Strom in Quadratur erhalten, welcher weder Arbeit leistet, noch solche verzehrt. Dieser effektlose Strom bringt zwar keinen Verlust in den Strom verbrauchenden Apparaten mit sich, zwingt jedoch das Verteilungsnetz, nicht nur den Strom OI_0, sondern einen grösseren Strom OI aufzunehmen und zu übertragen, und verursacht daher einen grösseren Verlust im Netze wegen des Joule'schen Effektes.

Wie wir im vorigen Abschnitte gesehen haben, kann der in Quadratur befindliche Strom direkt an Ort und Stelle von einem zu dem Apparate parallel geschalteten, passend gewählten Kondensator geliefert werden; daher erkennt man die grossen Vorteile, die man aus der Verwendung der Kondensatoren gewinnen könnte, wenn ihre Konstruktion den Anforderungen der Praxis genügen würde.

Wir können uns auch noch auf andere Weise über die Thatsache Rechenschaft geben, dass der in Quadratur befindliche Strom $I \sin \varphi$ keine Arbeit leistet, und zwar mit Hilfe der graphischen Darstellung durch die

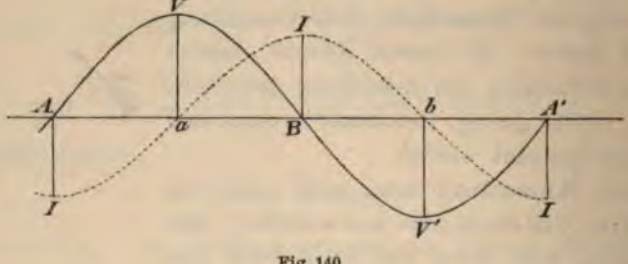


Fig. 140.

Kurven, welche als Abscissen die Zeiten und als Ordinaten die Momentanwerte der betrachteten Wechselstromgrössen haben. Die Kurven stellen zwei Sinuswellen dar; diejenige, die E oder V angiebt, eilt um eine Viertelperiode derjenigen vor, welche $I \sin \varphi$ darstellt (Fig. 140). Die Arbeit des Stromes $I \sin \varphi$ ist in jedem Moment durch das Produkt der

Ordinaten der beiden Kurven gegeben; dieselbe ist positiv auf den Strecken wie z. B. aB, bA', ..., in welchen die Ordinaten gleiches Vorzeichen haben, und negativ auf den Strecken wie z. B. Aa, Bb, ..., in welchen die Ordinaten mit entgegengesetztem Vorzeichen versehen sind.

Die Arbeit ist also abwechselnd positiv und negativ und wechselt ihr Vorzeichen jede Viertelperiode. Nun entsprechen jeder Viertelperiode Arbeiten, die in absolutem Werte gleich sind, weil die beiden Grössen dieselbe Reihe von Werten annehmen; es ist also die mittlere Arbeit des Stromes $I \sin \varphi$ gleich Null.

Wir wollen eine physikalische Deutung dieser Thatsache geben. Wenn der Strom Null ist, ist die Energie des von ihm erzeugten magnetischen Feldes ebenfalls Null, aber die Potentialdifferenz, d. h. die Energie des elektrischen Feldes ist ein Maximum. Von diesem Augenblicke an nehmen die Potentialdifferenz und die elektrische Energie ab, die Stromstärke und die magnetische Energie dagegen zu; nach einer Viertelperiode ist v gleich Null und die Stromstärke ein Maximum. Es wird also in dieser Viertelperiode vom elektrischen Felde Arbeit geleistet; die ganze elektrische Energie setzt sich in magnetische Energie um. In der nachfolgenden Viertelperiode wächst v in umgekehrtem Sinne an, und der Strom nimmt ab und leistet eine negative Arbeit, welche die Umwandlung der magnetischen in elektrische Energie darstellt, u. s. w. Es treten also der Reihe nach periodische Umwandlungen von Energie auf, ohne dass äussere Arbeit aufgewandt oder gewonnen wird.

Wenn der Wechselstrom nicht einfach harmonisch ist, so stimmt der Wert der effektiven, vom Strome geleisteten Arbeit w allgemein mit dem Werte der scheinbaren, durch das Produkt $\mathfrak{V}\mathfrak{J}$ gegebenen Arbeit ebenfalls nicht überein, aber das Verhältnis dieser beiden Arbeiten kann nicht mehr einfach durch den Cosinus eines Winkels ausgedrückt werden.

Das Verhältnis $\frac{w}{\mathfrak{V}\mathfrak{J}}$, dessen Betrachtung grosse Wichtigkeit bei den industriellen Apparaten besitzt, wird *Leistungsfaktor* oder auch Faktor oder Koefficient des Arbeitsverlustes genannt. Kapp nennt es *plant efficiency*.

124. Induktanz und Kapazität der elektrischen Leitungen. — Ein Wechselstromkreis weist immer Selbstinduktion und Kapazität auf. Selbstinduktion zeigt er, weil es nicht möglich ist, den magnetischen Induktionsfluss, welcher vom Strome erzeugt wird und mit dem Stromkreise verkettet ist, zu Null zu machen; er besitzt ferner stets, auch wenn in ihm keine eigentlichen Kondensatoren enthalten sind, eine gewisse Kapazität, weil zwischen den einzelnen Punkten auf der Strombahn, die ja verschiedenes

Potential besitzen, und zwischen diesen und den umgebenden Körpern (insbesondere der Erde, welche das Potential Null besitzt) ein elektrisches Feld besteht.

Der Wert der Induktanz hängt von der Anordnung des Stromkreises und von der magnetischen Permeabilität der umgebenden Körper ab, in welchen sich das magnetische Feld bildet; der Wert der Kapazität hängt von der Anordnung des Stromkreises und von der Dielektrizitätskonstanten der Körper ab, in welchen das elektrische Feld entsteht.

Bei dem Studium eines Verteilungsnetzes, d. h. der Leitungen, welche den Strom von der Zentralstation d. i. der Erzeugungsstelle des Stromes an die Empfangsstationen d. i. die Verbrauchsstellen führen, muss man sowohl der Induktanz als auch der Kapazität Rechnung tragen.

Selbst in einer einfachen, aus zwei Drähten, dem Hin- und Rückleiter, bestehenden Leitung kann, wenn deren Länge gross ist, die Induktanz erhebliche Werte erreichen. In der Praxis benutzt man besondere Anordnungen, um die Induktanz so klein wie möglich zu machen. So benutzt man als unterseeische und unterirdische Leitungen sog. konzentrische Kabel. Diese sind aus zwei Leitern gebildet, von denen der eine zylindrisch, der andere röhrenförmig und mit dem ersten koaxial angeordnet ist. Passende Isolationsschichten isolieren die beiden Leiter von einander und den äusseren von der Erde oder dem Wasser, in welche das Kabel gelegt wird; äussere Blei- oder Eisenarmierungen dienen als mechanischer Schutz.

Eine andere ebenfalls gebräuchliche Anordnung (Ferranti) ist die von zwei koaxialen röhrenförmigen Leitern, die entsprechend gegen einander und gegen aussen isoliert sind. In diesen Fällen ist die Induktanz ein Minimum, weil die in den beiden Leitern laufenden Ströme hinsichtlich ihrer Fernwirkungen zwei entgegengesetzt gleichen, in der Achse selbst verlaufenden Strömen gleichwertig sind.

Von der Thatsache, dass eine elektrische Leitung immer eine gewisse, zuweilen auch bedeutende Kapazität besitzt, kann man sich leicht dadurch Rechenschaft geben, dass man einige besondere Fälle betrachtet.

In einem konzentrischen Kabel stellen die beiden Leiter die Belegungen, die dazwischenliegende Isolation das Dielektrikum eines wirklichen, zylindrischen Kondensators dar. Im Falle zweier paralleler Kabel ist jedes derselben einem zylindrischen Kondensator äquivalent, welcher als innere Belegung den Leiter und als äussere den metallischen Schutzmantel des Kabels hat; die beiden äusseren Armaturen sind miteinander in Verbindung durch die Erde oder das Wasser, worin sie sich befinden, und folglich ist der Komplex beider Kabel dem System zweier zylindrischer, hintereinander geschalteter Kondensatoren gleichwertig. Bei Luftleitungen entsteht das elektrische Feld zwischen den beiden Leitern

und zwischen jedem einzelnen und der Erde; hier ist die Kapazität viel kleiner, aber im allgemeinen doch nicht ganz verschwindend.

125. Wirkung der Induktanz und der Kapazität in einem Wechselstromnetze. Ferranti'sches Phänomen. — Eine von Wechselstrom durchflossene elektrische Leitung besitzt immer, wie schon erwähnt, eine Induktanz und eine Kapazität. Wie dieselben sich berechnen lassen, werden wir später betrachten; wir wollen zunächst zusehen, welchen Einfluss das Vorhandensein von Induktanz und Kapazität in einem Wechselstromnetze ausübt.

Betrachten wir den einfachen, praktischen Fall, dass ein Strom von einer Erzeugerstation A (Fig. 141) durch eine aus Hin- und Rückleiter bestehende Leitung nach einer einzigen Empfangsstation B, in welcher die Stromverbraucher sind, fliesst. Wir können in Gedanken dieses System

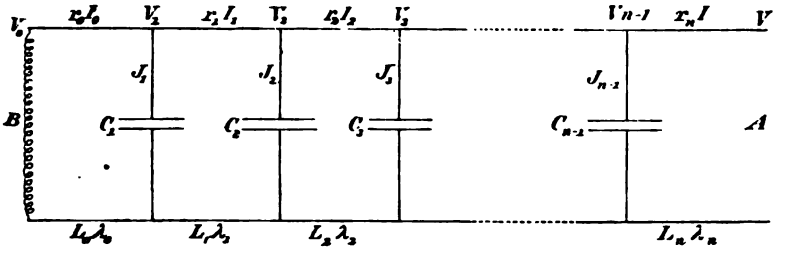


Fig. 141.

durch ein ideelles, der Wirklichkeit beliebig nahe kommendes System ersetzen, indem wir die Leiter selbst zwar als kapazitätsfrei, aber zwischen denselben parallel geschaltete Kondensatoren als vorhanden annehmen. Die Zahl dieser Kondensatoren sollte, da die Kapazität auf die ganze Länge des Netzes verteilt ist, unendlich gross sein, wir können uns aber mit einer endlichen Zahl passend zwischen den Endpunkten A und B angeordneter Kondensatoren begnügen. Je grösser die Zahl der betrachteten Kondensatoren sein wird, um so mehr werden wir uns der Wirklichkeit nähern.

Als gegeben haben wir, der Grösse und Phase nach, die zum Betriebe des Stromverbrauchapparates B nötige Potentialdifferenz v_0 und die Stromstärke i_0 anzusehen; zu ermitteln sind die entsprechend vom Generator A zu erzeugenden Grössen v und i. Im allgemeinen sind v und i wegen des Einflusses des Widerstandes, der Induktanz und der Kapazität der Strombahn von v_0 und i_0 verschieden.

Wir bezeichnen mit r, L und $\lambda = 2\pi n L$ bezw. den Ohm'schen Widerstand, die Induktanz und den induktiven Widerstand der Gesamtheit

der Hin- und Rückleiter für eine beliebige durch die Abzweigpunkte zweier einander folgender Kondensatoren begrenzte Strecke, mit i die Intensität des Stromes, der dieselbe durchfließt, und ferner mit den Indices 1, 2, 3 ... die einzelnen Strecken der Leitung. Wir setzen den Ohm'schen und den induktiven Widerstand der die Kondensatoren enthaltenden Zweige gleich Null voraus und bezeichnen mit C, r und j, ebenfalls mit den Indices 1, 2, 3 ... versehen, bzw. die Kapazität, die Potentialdifferenz zwischen den Belegungen der Kondensatoren und die Stärke der Ströme, welche sie durchfließen.

Bei dieser schematischen Anordnung variiert die Stromstärke sprungweise in den Abzweigpunkten der Kondensatoren, während sie in einem wirklichen Netze durch Einfluß der Kapazität stetig variiert.

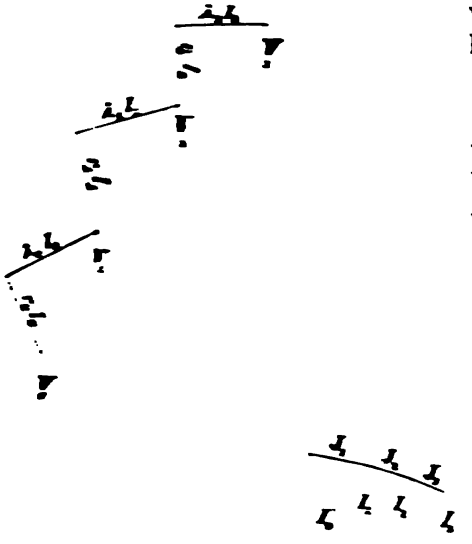


Fig. 142.

Es seien die zwei Vektoren OV_0 und OI_0 (Fig. 142) gegeben, welche r_0 und i_0 darstellen; wir können, von B nach A fortschreitend, nach einander alle Werte von i nach r durch graphische Konstruktionen ermitteln.

Für die erste Strecke, zwischen der Empfangsstation und dem Kondensator C_1, haben wir nach dem Ohm'schen Gesetze:

$$r_1 - r_0 - L\frac{di_0}{dt} = r_0 i_0$$

oder:

$$r_1 = r_0 + r_0 i_0 + L\frac{di_0}{dt}.$$

Der Vektor OV_1, welcher r_1 darstellt, ist also die Summe aus drei Vektoren: V_0, $r_0 I_0$ parallel zu I_0 und $i_0 I_0$ senkrecht zu I_0.

Nachdem V_1 gefunden, ergiebt sich als der Wert der Stromstärke im Kondensator C_1:

$$J_1 = 2\pi n C_1 V_1,$$

welcher bekanntlich eine Phasenvoreilung von $90°$ gegen den Wert von V_1 aufweist.

Betrachten wir nunmehr die zweite Strecke, welche zwischen den Kondensatoren C_1 und C_2 gelegen ist.

Allgemein gilt die Gleichung:

$$i_1 = i_0 + j_1,$$

olglich ist der Vektor OI_1, welcher den Strom angiebt, die Resultierende us den beiden Vektoren, welche bezw. i_0 und j_1 darstellen. Nachdem I_1 gefunden ist, kann man V_2 in analoger Weise wie V_1 ermitteln. Das Ohm'sche Gesetz, auf die zweite Strecke angewandt, giebt uns die Beziehung:

$$v_2 = v_1 + r_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt},$$

nd der Vektor V_2 ist die Resultierende aus dem Vektor V_1 und aus den ektoren $r_1 I_1$ parallel zu OI_1 und $\lambda_1 I$ normal zu OI_1. Aus dem Werte on V_2 ergiebt sich als Wert der Stromstärke im zweiten Kondensator:

$$J_2 = 2\pi n C_2 V_2,$$

obei wiederum eine Phasenvoreilung von 90° gegen V_2 auftritt.

In derselben Weise hat man die Berechnungen für die nachfolgenden recken bis zur Erzeugungsstation vorzunehmen.

In einem Gleichstromnetze ist die Stromstärke konstant und das tential sinkt proportional dem Ohm'schen Widerstand von der Erzeuger- ch der Empfangsstation zu; in einem Wechselstromnetze dagegen können e Stromstärke und das Potential je nach dem Widerstand, der Induktanz d der Kapazität des Netzes, und je nach den Betriebsverhältnissen be- big variieren.

In den betrachteten Beispielen nimmt das Potential von der Er- ugerstation A nach der Empfangsstation B hin ab; die Stromstärke sitzt nicht einen konstanten Wert längs der ganzen Linie, sondern chst von A nach B, weil die Ströme j der Kondensatoren sich zu dem n A gelieferten Strome addieren; die Zunahme der Stromstärke ist n so grösser, je grösser die Kapazität des Netzes ist.

In demselben Netze können, wenn e Betriebsverhältnisse geändert wer- n, entgegengesetzte Erscheinungen uftreten, d. h. es kann sein, dass von er Erzeuger- nach der Empfangs- tation hin die Potentialdifferenz zu-, lie Stromstärke dagegen abnimmt.

Es möge bei dem betrachteten Beispiele der Stromkreis im Punkte B ine Unterbrechungsstelle besitzen, so- lass der Strom I_0 sehr klein oder gleich ull wird. Unter diesen Umständen $I_0 = 0$, $r_0 I_0 = 0$, $\lambda_0 I_0 = 0$) fällt V_1

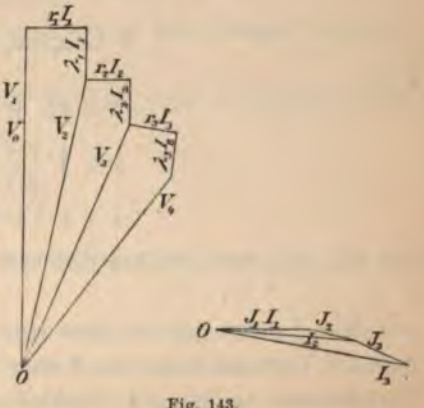


Fig. 143.

der Hin- und Rückleiter für e
einander folgender Kondensat
des Stromes, der dieselbe d
3 . . . die einzelnen Strecken
und den induktiven Wider
Zweige gleich Null voraus u
den Indices 1, 2, 3 . . . ver
differenz zwischen den Beleg
Ströme, welche sie durchflie

Bei dieser schematische
weise in den Abzweigpunkt

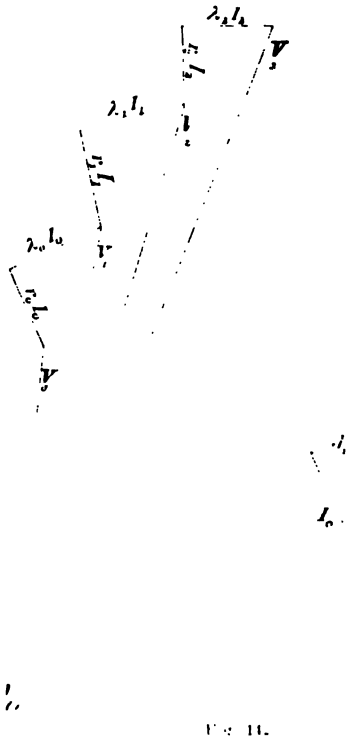


Fig. 11.

Nachdem V_1 gefunden,
im Kondensator C_1:

welcher bekanntlich eine P
V_1 aufwei

Be[illegible]
Kon[illegible]

Porzellanisolatoren bei Luftleitungen und an den Verbindungsstellen bei Kabeln. Aus diesen Gründen ist es in der Praxis nicht nötig, sich der Formel von Heaviside zu bedienen, und es genügt vollständig, selbst für grosse Längen, das von uns oben eingeschlagene Verfahren anzuwenden.

126. Berechnung der Kapazität eines Netzes. — Wir wollen nun zusehen, wie man in den praktisch wichtigsten Fällen die Berechnung der Kapazität der elektrischen Leitungen vornimmt.

1. Die Kapazität eines konzentrischen Kabels, welches einem wirklichen zylindrischen Kondensator gleichkommt, ist (14) [46]:

$$C = \frac{\varepsilon l}{2 \log \frac{R_2}{R_1}},$$

wobei l die Länge des Kabels, R_1 der äussere Radius des inneren Leiters, R_2 der innere Radius des äusseren Leiters und ε die Dielektrizitätskonstante bedeutet.

2. In dem Falle zweier paralleler, konzentrischer Kabel berechnet man getrennt die Kapazität C_1 und C_2 jedes einzelnen derselben durch die eben erwähnte Formel; die Kapazität C des Komplexes der beiden Leiter berechnet man durch die bekannte Formel [46], welche die Kapazität zweier hintereinander geschalteter Kondensatoren angiebt:

$$C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}.$$

Ist $C_1 = C_2$, so ist:

$$C = \frac{1}{2} C_1.$$

3. Die Kapazität eines einzigen Drahtes einer Luftleitung ist (15) [46]:

$$C = \frac{\varepsilon l}{2 \log \frac{2d}{r}},$$

wobei mit r der Radius des Drahtes und mit d der Abstand zwischen Draht und Erde bezeichnet wird.

4. Die Kapazität zweier paralleler Drähte einer Luftleitung wird ungenähert durch die Formel (16) [46]:

$$C = \frac{\varepsilon l}{4 \log \frac{D}{r}}$$

ausgedrückt, worin r der Radius der Drähte und D die Entfernung zwischen deren Achsen ist.

In dem Falle von Luftleitungen bildet jedoch jeder der Isolatoren, welche den Draht tragen, einen wirklichen Kondensator in Parallelschaltung zwischen dem Draht und der Erde; und im allgemeinen ist die

gesamte Kapazität der Isolatoren grösser als jene des Drahtes selbst. Eine theoretische Berechnung ist hier nicht mehr möglich, und es ist besser, sich auf Ergebnisse der Erfahrung, die an ähnlichen Leitungen gewonnen worden sind, zu beziehen.

Übrigens ist die Kapazität einer Luftleitung allgemein sehr klein, und abgesehen von Fällen, in welchen die Leitung sehr lang ist, kann ihre Wirkung vernachlässigt werden.

Es ist zu beachten, dass die Kapazität in diesen Formeln in elektrostatischen Einheiten ausgedrückt ist; will man dieselben in elektromagnetischen Einheiten haben, so hat man sie mit dem entsprechenden Umrechnungsfaktor zu multiplizieren.*)

37. Berechnung der Induktanz in einem Verteilungsnetze. — Wir haben gesehen [110], dass die Induktanz eines Stromkreises nur dann eine vollkommen bestimmte Grösse ist, wenn das Medium, das ihn umgibt, eine konstante magnetische Permeabilität besitzt; diese Bedingung ist bei den elektrischen Leitungen erfüllt oder kann näherungsweise als erfüllt angenommen werden.

Bei der Definition der Induktanz eines Stromkreises haben wir stillschweigend vorausgesetzt, dass dieser fadenförmig wäre; nun darf man aber in dem Falle der elektrischen Leitungen die Dimensionen der Leiter nicht mehr vernachlässigen. Um deren Induktanz zu berechnen, muss man folglich die Verteilung der Stromstärke auf den Querschnitt kennen. Wir werden in dem nächsten Abschnitte sehen, dass ein Wechselstrom sich nicht gleichmässig auf den ganzen Querschnitt des Leiters verteilt, sondern dass die Stromdichte von innen nach aussen zunimmt; für eine strenge genaue Berechnung der Induktanz wäre es aber notwendig, zuvor die Stromverteilung auf den Querschnitt durch ein Verfahren, das wir angeben werden, zu ermitteln. Praktisch benutzt man ein weniger strenges, aber schnelleres Verfahren und nimmt man als Wert der Induktanz den Mittelwert aus den Grenzwerten an, welche dem Vorhandensein eines gleichförmig auf den Querschnitt verteilten Stromes und eines in einer dünnen, zylindrischen Schicht konzentrierten Stromes entsprechen.

Betrachten wir einige besondere Fälle, welche für die Praxis von Bedeutung sind.

1. Koaxiales *Kabel mit axialem Leiter.* — Es sei OO die Achse des Kabels, a der Radius des inneren Leiters, b und c bezw. der innere und der äussere Radius des röhrenförmigen Leiters; der ebenfalls röhren-

*) Siehe den Anhang über die Masseinheiten.

förmige Teil von der Dicke $b—a$ ist von der Isolation eingenommen. Wenn der innere Leiter von einem Strome i_g durchflossen wird, so fliesst ein gleicher Strom in entgegengesetzter Richtung in dem äusseren Leiter.

Wir setzen zunächst voraus, dass die Stromstärke gleichmässig auf den Querschnitt des Leiters verteilt sei.

Aus einfachen Symmetriegründen sind in dem von diesem System erzeugten Felde die Kraft- und die Induktionslinien Kreise, deren Mittelpunkte sich auf der Achse OO befinden und deren Ebenen normal zur Achse sind. Die magnetische Kraft und die magnetische Induktion besitzen längs jedes dieser Kreise konstanten Wert.

Das Integral der magnetischen Kraft längs des ganzen Umfanges eines Kreises mit dem Radius x ist (9) [100]:

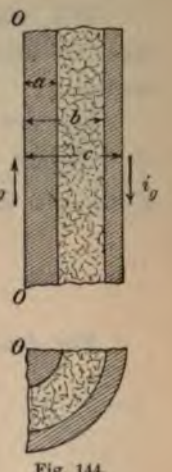


Fig. 144.

$$\mathscr{H} 2\pi x = 4\pi i,$$

woraus sich der Wert der Kraft $\mathscr{H}$ für die Punkte des Kreisumfanges selbst ergiebt:

$$\mathscr{H} = \frac{2i}{x}.$$

In diesen Ausdrücken bezeichnet i die Intensität des Stromes, der durch die Fläche des betrachteten Kreises hindurchgeht, und folglich ist der Wert von $\mathscr{H}$ unabhängig von dem Strome, der ausserhalb des Kreises fliesst.

Für einen beliebigen ausserhalb des Kabels gelegenen Punkt ist $i = i_g - i_g = 0$ und folglich auch $\mathscr{H} = 0$, d. h. das Feld ist gleich Null.

Längs des Kreises mit dem Radius x hat die magnetische Induktion den Wert:

$$\mathscr{B} = \mu \mathscr{H} = \frac{2\mu i}{x}.$$

Wenn wir in der Entfernung x von der Achse OO in einer durch die Achse gelegten Ebene ein unendlich schmales Rechteck mit den Seiten l und dx betrachten, wobei l die Länge des Kabels bedeutet, so ist der Induktionsfluss, der das Rechteck durchdringt:

$$\mathscr{B} l dx = 2\mu l i \frac{dx}{x},$$

und der gesamte vom Strome erzeugte Fluss ist durch den Ausdruck:

$$\varphi = 2l \int_b^c \mu i \frac{dx}{x}$$

gegeben.

Kraft $\mathfrak{H}$ in jedem Punkte die Resultierende aus den Kräften $\mathfrak{H}'$ und $\mathfrak{H}''$, welche von den einzelnen Strömen herrühren,

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{H}' + \mathfrak{H}''.$$

Berechnen wir den mit dem Stromkreise verketteten Fluss φ, welcher senkrecht einen Teil von der Länge l der durch die Achsen bestimmten Ebene durchsetzt. Nehmen wir der Einfachheit halber im ganzen Felde $\mu = 1$ an, so gilt:

$$\varphi = l\int_0^b \mathfrak{H}\,dx = l\int_0^b \mathfrak{H}'\,dx + l\int_0^b \mathfrak{H}''\,dx.$$

Setzen wir zunächst voraus, der Strom sei gleichmässig verteilt, und berechnen wir die einzelnen Teile des Integrals zwischen den Grenzen 0 und $b - a'$ im Dielektrikum, und zwischen $b - a'$ und b im zweiten Leiter getrennt.

Für $x < a$ ist:

$$\mathfrak{H}' = 2i_g\frac{x}{a^2}, \quad \mathfrak{H}'' = \frac{2i_g}{b-x},$$

daher:

$$\int_0^a \mathfrak{H}\,dx = 2i_g\left[\frac{1}{2} + \log\frac{b}{b-a}\right].$$

Für $a < x < b - a'$ ist:

$$\mathfrak{H}' = \frac{2i_g}{x}, \quad \mathfrak{H}'' = \frac{2i_g}{b-x},$$

daher:

$$\int_0^{b-a'} \mathfrak{H}\,dx = 2i_g\left[\log\frac{b-a'}{a} + \log\frac{b-a}{a'}\right].$$

Für $b - a' < x < b$ ist:

$$\mathfrak{H}' = \frac{2i_g}{x}, \quad \mathfrak{H}'' = 2i_g\frac{b-x}{a'^2},$$

daher:

$$\int_{b-a'}^{b} \mathfrak{H}\,dx = 2i_g\left[\frac{1}{2} + \log\frac{b}{b-a'}\right].$$

Durch Summation der Integrale und Vereinfachung des ermittelten Ausdruckes erhält man:

$$\varphi = 2li_g\left[\log\frac{b^2}{aa'} + 1\right];$$

der Maximalwert der Induktanz ist also:

$$L' = 2l\left[\log\frac{b^2}{aa'} + 1\right].$$

ich dünne Schichten mit dem Radius a bezw. b reduziere, und die Rechnung in analoger Weise wie vorhin ausführen, so finden wir für die Induktanz den Wert:

$$L'' = 2l \log \frac{b}{a}.$$

Alle möglichen Werte der Induktanz sind zwischen den Werten L' und L'' eingeschlossen; man kann also als praktischen Wert den Mittelwert dieser beiden annehmen:

$$L = 2l\left[\log \frac{b}{a} + \frac{\mu}{2}\frac{c^2}{c^2 - b^2} \log \frac{c}{b}\right].$$

2. *Konzentrisches Kabel, gebildet aus zwei röhrenförmigen koaxialen Leitern.* — Bezeichnen wir mit a_0 und b, a und c (Fig. 145) die inneren bezw. die äusseren Radien der beiden Leiter.

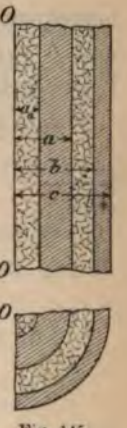


Fig. 145.

Indem man diesen Fall wie den vorigen behandelt, ergiebt sich der einem gleichmässig verteilten Strome entsprechende Maximalwert der Induktanz zu:

$$L' = 2l\left[\log \frac{b}{a} + \mu\left(\frac{c^2}{c^2 - b^2} \log \frac{c}{b} - \frac{a_0^2}{a^2 - a_0^2} \log \frac{a}{a_0}\right)\right]$$

und der einem in zwei unendlich dünnen Schichten mit dem Radius b bezw. a konzentrierten Strome entsprechende Minimalwert derselben zu:

$$L'' = 2l \log \frac{b}{a};$$

ihr Mittelwert ist:

$$L = 2l\left[\log \frac{b}{a} + \frac{\mu}{2}\left(\frac{c^2}{c^2 - b^2} \log \frac{c}{b} - \frac{a_0^2}{a^2 - a_0^2} \log \frac{a}{a_0}\right)\right].$$

3. *Leitung, aus zwei parallelen Leitern bestehend.* — Bezeichnen wir mit a bezw. a' den Halbmesser der zwei Leiter (Fig. 146) und mit b den Abstand ihrer Achsen.

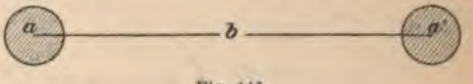


Fig. 146.

Ohne Rücksicht darauf zu nehmen, wie die Verteilung des Stromes auf den Querschnitt der Leiter ist, setzen wir voraus, dass dieselbe wieder symmetrisch in bezug auf die einzelnen Achsen sei, sodass die von einem Strome in einem Punkte hervorgerufene magnetische Kraft gleich $\frac{2i}{x}$ sei.

In dem von dem System der beiden Ströme erzeugten Felde ist die

durch das Rechteck hindurchgehende Fluss, und jenes ist mithin Sitz einer E. M. K.:

$$e = -\frac{d\varphi}{dt}.$$

In der Zeit, in welcher der Strom wächst, nimmt auch φ zu, $\frac{d\varphi}{dt}$ ist positiv und folglich e negativ, d. h. e sucht in dem Rechtecke einen Strom zu erzeugen, welcher der Drehungsbewegung des im Sinne der Kraftlinien fortschreitenden Maxwell'schen Korkziehers entgegengesetzt ist. Die Pfeile e deuten die Richtung der E. M. K. an; letztere ist beim abnehmenden Strome entgegengesetzt.

In dem Leiter treten also induzierte Ströme auf, welche sich dem Hauptstrome superponieren und eine Ungleichmässigkeit der Verteilung bedingen.

Untersuchen wir näher die Wirkung dieser induzierten E. M. KK.

Bei einer gleichmässigen Verteilung des Stromes wäre die Potentialdifferenz zwischen den Punkten a und b gleich derjenigen zwischen d und c, und diese können wir durch den Vektor $0V$ (Fig. 148), in Phasenvoreilung gegen den Strom $0I$, darstellen. Dieser Potentialdifferenz superponieren sich jedoch die eben betrachteten E. M. KK., in Phase mit $\frac{d\varphi}{dt}$, d. h. mit $\frac{di}{dt}$, welche in den Seiten ab und dc entgegengesetzte Richtungen besitzen und von zwei Vektoren OE und OE' normal zu OI und einander entgegengesetzt dargestellt werden können.

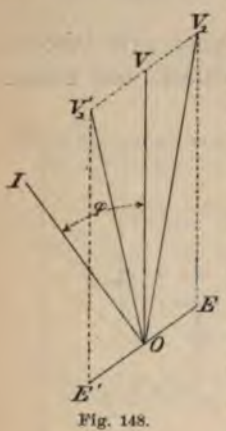


Fig. 148.

Die Potentialdifferenzen zwischen d und c, und a und b, welche bezw. von dem aus OV und OE resultierenden Vektor OV_1 und von dem aus OV und $0E'$ resultierenden Vektor OV_1' angegeben werden, sind indessen von einander verschieden; es ist immer $OV_1 > OV > OV_1'$, weil der Winkel VOE wegen der Phasenverschiebung von I gegen V immer ein spitzer ist, während VOE' ein stumpfer ist.

Es folgt daraus, dass die Potentialdifferenzen und folglich auch die Stromdichten von der Achse nach der Peripherie hin zunehmen. Diese Wirkung ist um so grösser, je grösser der Drahtdurchmesser und die Stromfrequenz sind; letztere übt einen Einfluss nicht nur auf die Änderung des Flusses und folglich auf die induzierten E. M. KK. aus, sondern auch auf die Phasendifferenz V und I und mithin auf die Winkel VOE und VOE'.

Um das mathematische Gesetz der Erscheinung ableiten zu können, beziehen wir diese Darlegungen auf ein unendlich kleines Rechteck von

der Länge *Eins*, welches in einem Längsschnitte des Leiters liegt und zwei Seiten parallel zur Achse in dem Abstande x und $x + dx$ von derselben besitzt. Die an dieser Stelle vorhandene Feldstärke $\mathfrak{H}$ und Stromdichte u sind Funktionen des Abstandes x von der Achse und der Zeit t.

Die Feldstärke ist, wie oft erwähnt, durch die Gleichung:

$$\mathfrak{H} = \frac{2i}{x}, \quad \mathfrak{H}x = 2i$$

als Funktion von x gegeben.

Durch Differentiation nach x erhält man:

$$x\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial x} + \mathfrak{H} = 2\frac{\partial i}{\partial x},$$

Nun ist $\frac{\partial i}{\partial x}dx$ der Strom, welcher den Kreisring mit den Radien x und $x + dx$ durchsetzt, folglich ist, abgesehen von unendlich kleinen Grössen zweiter Ordnung:

$$\frac{\partial i}{\partial x} = 2\pi u x;$$

es ergiebt sich also:

$$(\alpha) \qquad x\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial x} + \mathfrak{H} = 4\pi u x.$$

Die E. M. K. der Induktion, welche auf die Seiten des Rechtecks wirkt, ist eine Funktion des Abstandes von der Achse. Bezeichnet e die E. M. K. in der Seite, welche von der Achse die Entfernung x hat, so ist die E. M. K. in der zweiten Seite: $e + \frac{\partial e}{\partial x}dx$, und folglich ist die auf den gesamten Umfang des Rechtecks wirkende E. M. K.:

$$\frac{\partial e}{\partial x}dx.$$

Andererseits ist der Fluss durch das Rechteck, wenn μ die magnetische Permeabilität des Materials bedeutet, gleich $\mu\mathfrak{H}dx$, und folglich ist die E. M. K. ebenfalls durch:

$$\mu\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t}dx$$

ausgedrückt.

Durch Gleichsetzung beider Ausdrücke der E. M. K. erhält man:

$$\frac{\partial e}{\partial x} = \mu\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t}.$$

Hierbei ist als positive Richtung für e diejenige des Stromes i anzusehen, wenn man als positive Richtung für $\mathfrak{H}$ diejenige des vom Strome erzeugten Flusses annimmt.

Ist ϱ der spezifische Widerstand des Materials, aus dem der Leiter besteht, so ist:

$$e = \varrho u,$$

und unter der Voraussetzung, dass ϱ unabhängig von x, d. h. dass der Leiter homogen sei:

$$(\beta) \qquad \frac{\partial e}{\partial x} = \varrho \frac{\partial u}{\partial x}.$$

In den beiden Gleichungen (α) und (β) treten zur gleichen Zeit die partiellen Differentialquotienten von $\mathscr{H}$ und u auf.

Aus diesen kann man leicht zwei andere Gleichungen ermitteln, von welchen eine nur die partiellen Differentialquotienten von u und die andere nur diejenigen von $\mathscr{H}$ enthalten:

$$(\gamma) \qquad \begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{x}\frac{\partial u}{\partial x} &= 4\pi \frac{\mu}{\varrho}\frac{\partial u}{\partial t} \\ \frac{\partial^2 \mathscr{H}}{\partial x^2} + \frac{1}{x}\frac{\partial \mathscr{H}}{\partial x} - \frac{1}{x^2}\mathscr{H} &= 4\pi \frac{\mu}{\varrho}\frac{\partial \mathscr{H}}{\partial t}. \end{aligned}$$

Durch Integration dieser beiden Gleichungen erhält man die Werte von u und $\mathscr{H}$ als Funktionen von x; diese Integration kann leicht ausgeführt werden, besonders wenn man die Stromdichte u als sinoïdale Funktion der Zeit voraussetzt.

Ohne diese Berechnungen durchzuführen, wollen wir nur deren Ergebnisse angeben.

Wenn die Frequenz n des Stromes und der Durchmesser d des Leiters erhebliche Werte besitzen, so wird die Stromdichte an der Oberfläche sehr gross und in der Achse praktisch gleich Null, sodass der Strom bei sehr grossen Werten von n und d als in einer dünnen Schicht an der Oberfläche konzentriert angesehen werden kann. Diese Erscheinung ist unter dem Namen *Skin-Effekt* bekannt.

Das Innere eines von einem Wechselstrome mit grosser Frequenz durchflossenen Leiters trägt nicht wesentlich zur Leitung des Stromes bei; der Querschnitt ist nicht gut ausgenutzt. Der Ohm'sche Widerstand R_w, welchen derselbe dem Durchgange des Stromes entgegensetzt, ist folglich grösser, als wenn der ganze Querschnitt ausgenutzt wäre, d. h. grösser als der Widerstand R_g, den derselbe Leiter, von Gleichstrom durchflossen, besitzt. Diese ungleichförmige Stromverteilung bringt auch eine Zunahme der Joule'schen Wärme hervor.

Betrachten wir die Längeneinheit eines homogenen Leiters mit dem spezifischen Widerstande ϱ. Ist dS der Querschnitt der röhrenförmigen

Zone mit den Radien x und $x + dx$, so ist die Stromstärke durch denselben gleich $\mathfrak{U} dS$; der Widerstand des entsprechenden Konduktorteiles ist $\varrho \frac{1}{dS}$, und folglich ist die sich in demselben entwickelnde Wärmemenge:

$$\varrho \mathfrak{U}^2 dS.$$

Man hat also im Leiter einen Strom von der Stärke:

$$\mathfrak{J} = \int \mathfrak{U} dS,$$

welcher eine Wärmemenge:

$$\mathfrak{Q}_w = \varrho \int \mathfrak{U}^2 dS$$

erzeugt.

Der Ohm'sche Widerstand R_w, den der Leiter dem Durchgang des Wechselstromes entgegensetzt, ist der Quotient zwischen der Joule'schen Wärme und dem Quadrat der Stromstärke, d. h.:

$$R_w = \frac{\mathfrak{Q}_w}{\mathfrak{J}^2} = \varrho \frac{\int \mathfrak{U}^2 dS}{[\int \mathfrak{U} dS]^2}.$$

Bei einer und derselben Stromstärke ist der Nenner konstant, während dagegen der Zähler von der Verteilung der Stromdichte auf den Querschnitt abhängt und bei gleichförmiger Verteilung ein Minimum wird. Daher ist der Wert des Widerstandes R_w stets grösser, als wenn der Strom gleichförmig verteilt wäre.

Aus dem gefundenen Ausdruck für R_w kann man das Verhältnis

$$K = \frac{R_w}{R_g}$$

zwischen dem Widerstand R_w, den der Leiter beim Durchgange von Wechselstrom besitzt, und dem nach dem Ohm'schen Gesetze berechneten Widerstand R_g, welchen der Leiter einem Gleichstrome entgegensetzt, ermitteln.

Lord Kelvin gab einen Ausdruck für K als Funktion des Quadrats des Durchmessers d des Leiters und der Frequenz n des Wechselstromes.

In folgender, von Hospitalier nach der Formel von Lord Kelvin berechneten Tabelle sind für verschiedene Werte von $nd^2 = \frac{d^2}{T}$ (wobei d in cm. ausgedrückt ist) die entsprechenden Werte der Konstanten K angegeben, d. h. des Koeffizienten, mit welchem der nach dem Ohm'schen Gesetze berechnete Widerstand multipliziert werden muss, um den wirklichen Widerstand des Leiters beim Durchgang von Wechselströmen zu ermitteln

$nd^2 = \frac{d^2}{T}$	$K = \frac{R_w}{R_g}$	$nd^2 = \frac{d^2}{T}$	$K = \frac{R_w}{R_g}$
0	1.0000	1620	1.8628
20	1.0000	2000	2.0430
80	1.0001	2420	2.2190
180	1.0258	2880	2.3937
320	1.0805	5120	3.0956
500	1.1747	8000	3.7940
720	1.3180	18000	5.5732
980	1.4920	32000	7.3250
1280	1.6778	—	—

Für Werte von $\frac{d^2}{T} > 32000$ kann der Widerstand R_w mit genügender Annäherung gleich demjenigen angenommen werden, der nach dem Ohm'schen Gesetze für einen hohlen, zylindrischen Leiter mit dem äusseren Durchmesser gleich dem Durchmesser des gegebenen Leiters und der Dicke gleich $6.38\sqrt{T}$ cm berechnet wird.

Die oben angegebenen Werte für K beziehen sich auf den Fall, in welchem der Leiter aus reinem, die grösste Leitfähigkeit ($\varrho = 1.597$) besitzendem Kupfer besteht; wenn der Leiter aus einem anderen, aber unmagnetischen Metalle gebildet ist, dann sind die Werte der Tabelle mit dem Verhältnisse des spezifischen Widerstandes des betreffenden Metalls zu dem des Kupfers zu multiplizieren.

Besteht der Leiter aus magnetischem Material, z. B. aus Eisen, dann ist die Tabelle nicht mehr giltig, da ganz andere Verhältnisse entsprechend den Werten der magnetischen Permeabilität auftreten.

Aus der Betrachtung der angegebenen Zahlen geht hervor, dass die Erscheinung des Skin-Effektes bei den industriellen Anlagen, bei welchen der Durchmesser der Leitungen selten 1 cm übersteigt und die Frequenz 40 bis 50 beträgt, unberücksichtigt gelassen werden kann; allein bei den grössten in der Praxis bisher verwendeten Frequenzen (100) kann diese Erscheinung bemerklich werden.

Es ist also wohl zu beachten, dass der Wechselstrom bei grosser Frequenz und grossem Leiterquerschnitt nicht nur einen induktiven Widerstand veranlasst, sondern auch eine Zunahme des Ohm'schen Widerstandes bedingt; der induktive Widerstand übt einen Einfluss nur auf das Potentialgefälle längs der Leitung, aber nicht auf die entwickelte Wärmemenge aus; der Skin-Effekt dagegen verursacht wegen der schlechten Ausnutzung des Querschnittes eine grössere Energievergeudung infolge stärkerer Wärmeentwickelung in dem Leiter.

§ 3.

Entladungsströme der Kondensatoren.

129. Lord Kelvins Gleichungen. — Ausser den bereits betrachteten Wechselströmen haben noch andere veränderliche Ströme Wichtigkeit, und zwar die bei der Entladung der Kondensatoren entstehenden Ströme.

Es sei C die Kapazität eines Kondensators, r der Ohm'sche Widerstand des Leiters, welcher die beiden Belegungen A und B verbindet, L der Koeffizient der Selbstinduktion, den wir unter der Annahme, dass sich keine magnetischen Körper in der Nähe des Leiters befinden, als konstant voraussetzen, Q die Elektrizitätsmenge auf einer Belegung vor dem Beginn der Entladung und q der Wert der Ladung zur Zeit t. Es bezeichne ferner, ebenfalls zu der Zeit t, i die Stromstärke, v_1 und v_2 die Potentiale auf den Belegungen und $v = v_1 - v_2$ deren Differenz.

Das Ohm'sche Gesetz, auf den Teil des Stromkreises zwischen den Belegungen angewandt, giebt uns:

$$(\alpha) \qquad v - L\frac{di}{dt} = ri;$$

in der Zeit t ist die Ladung:

$$(\beta) \qquad q = Cv$$

und der Entladungsstrom:

$$(\gamma) \qquad i = -\frac{dq}{dt}.$$

Diese drei Gleichungen bestimmen die drei Grössen q, i und v als Funktionen der Zeit.

Um q zu ermitteln, eliminiere man i und v aus der Gleichung (α) unter Benutzung der Gleichungen (β) und (γ); man erhält dadurch:

$$(16) \qquad \frac{d^2q}{dt^2} + \frac{r}{L}\frac{dq}{dt} + \frac{1}{CL}q = 0.$$

Als ein partikuläres Integral dieser Differentialgleichung zweiter Ordnung erhalten wir:

$$(\delta) \qquad q = Ae^{kt},$$

worin A eine willkürliche und k eine zu bestimmende Konstante ist.

Durch Differentiation der Gleichung (δ) erhält man:

$$\frac{dq}{dt} = kAe^{kt} = kq, \quad \frac{d^2q}{dt^2} = k^2q;$$

und durch Einsetzung dieser Werte in Formel (16):

$$q\left(k^2 + \frac{r}{L}k + \frac{1}{CL}\right) = 0.$$

Da diese Beziehung für jeden Wert von q gelten muss, so muss k der Gleichung genügen:

$$(\varepsilon) \qquad k^2 + \frac{r}{L}k + \frac{1}{CL} = 0,$$

woraus man folgende beide Werte für k ermittelt:

$$k_1 = -\frac{r}{2L} + \sqrt{\frac{r^2}{4L^2} - \frac{1}{CL}},$$

$$k_2 = -\frac{r}{2L} - \sqrt{\frac{r^2}{4L^2} - \frac{1}{CL}}.$$

Diesen Werten entsprechen zwei partikuläre Integrale der Gleichung (16):

$$(\delta') \qquad \begin{cases} q = Ae^{k_1 t} \\ q = Be^{k_2 t}, \end{cases}$$

wobei A und B willkürliche Konstante sind.

Die Summe beider Integrale (δ')

$$(17) \qquad \begin{cases} q = Ae^{k_1 t} + Be^{k_2 t} \\ q = e^{-\frac{r}{2L}t}\left[Ae^{t\sqrt{\frac{r^2}{4L^2} - \frac{1}{CL}}} + Be^{-t\sqrt{\frac{r^2}{4L^2} - \frac{1}{CL}}}\right] \end{cases}$$

ist ebenfalls ein Integral der Gleichung (16) und ist sogar deren allgemeines Integral, weil die beiden Konstanten derart bestimmt werden können, dass q und $\frac{dq}{dt}$ zu einer gegebenen Zeit bestimmte Werte annehmen. Und zwar hat die Ladung in dem Zeitpunkte, von welchem aus wir rechnen, den Wert Q und der Strom ist gleich Null, folglich muss bei $t = 0$:

$$q = Q, \quad i = 0, \quad \frac{dq}{dt} = 0$$

sein.

Daher nimmt für $t = 0$ die Formel (17) die Gestalt an:

$$A - B = Q,$$

demnach ist:

$$k_1 A - k_2 B = 0$$

und:

$$\begin{cases} A = \frac{k_2}{k_2 - k_1} Q \\ B = -\frac{k_1}{k_2 - k_1} Q, \end{cases}$$

und durch Einsetzung der früher berechneten Werte für k_1 und k_2 erhält man:

$$(18)\qquad \begin{cases} A = \frac{Q}{2}\left[1 + \frac{r}{2L}\frac{1}{\sqrt{\frac{r^2}{4L^2} - \frac{1}{CL}}}\right] \\ B = \frac{Q}{2}\left[1 - \frac{r}{2L}\frac{1}{\sqrt{\frac{r^2}{4L^2} - \frac{1}{CL}}}\right] \end{cases}.$$

130. Aperiodische und oscillierende Entladung. — Man kann hier, je nach den Werten der unter dem Wurzelzeichen enthaltenen Grösse $\frac{r^2}{4L^2} - \frac{1}{CL}$, zwei verschiedene Fälle unterscheiden.

I. Die Wurzelgrösse ist reell, d. h.:

$$\frac{r^2}{4L^2} > \frac{1}{CL}, \quad r^2 > \frac{4L}{C}.$$

In der Kurve, welche als Abscissen die Zeiten und als Ordinaten die entsprechenden Werte von q hat (Fig. 149), ist für $t = 0$ $q = Q$: die Kurve geht von einem Punkte mit der Ordinate $OA = Q$ aus. Im Punkte A ist die Tangente der Linie parallel zu der Achse der Zeiten, da $\frac{dq}{dt}$ für $t = 0$ gleich Null ist. Nachher nimmt die Ordinate mehr oder weniger rasch ab, je nach dem Werte des Quotienten $\frac{r}{L}$, und sie wird gleich Null erst für $t = \infty$; die Kurve nähert sich asymptotisch der Abscissenachse.

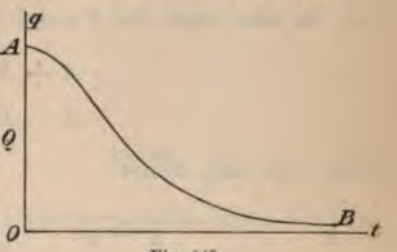


Fig. 149.

In diesem Falle ist $\frac{dq}{dt}$ immer negativ und folglich $i = -\frac{dq}{dt}$ immer positiv, d. h. der Entladungsstrom findet in einer und derselben Richtung statt. Theoretisch wird erst nach einer unendlich grossen Zeit der Strom gleich Null; praktisch besitzt er bereits nach einer sehr kurzen Zeit einen kaum merklichen Wert.

II. Die Wurzelgrösse ist imaginär, d. h. es ist:

$$\frac{r^2}{4L^2} < \frac{1}{CL}, \quad r^2 < \frac{4L}{C}.$$

Das Gesetz der Erscheinung ist dann ein ganz anderes. Der Einfachheit in der Schreibweise halber setzen wir:

$$\varphi = \sqrt{\frac{1}{CL} - \frac{r^2}{4L^2}},$$

d. h.:

$$\sqrt{\frac{r^2}{4L^2} - \frac{1}{CL}} = \varphi\sqrt{-1},$$

wobei φ eine reelle Grösse ist. Die Formel (17) kann dann geschrieben werden, wie folgt:

$$17' \qquad q = e^{-\frac{r}{2L}t}\left(Ae^{\varphi t\sqrt{-1}} + Be^{-\varphi t\sqrt{-1}}\right).$$

Dieser Ausdruck stellt eine periodische Funktion der Zeit dar, da die Exponenten trigonometrische Funktionen sind:

$$e^{\varphi t\sqrt{-1}} = \cos\varphi t + \sqrt{-1}\sin\varphi t$$
$$e^{-\varphi t\sqrt{-1}} = \cos\varphi t - \sqrt{-1}\sin\varphi t.$$

Durch Substitution erhält man:

$$q = e^{-\frac{r}{2L}t}\left[A + B\cos\varphi t + (A - B)\sqrt{-1}\sin\varphi t\right],$$

und, da man nach der Formel (1):

$$A + B = Q$$
$$A - B = \frac{r}{2L}\frac{1}{\varphi\sqrt{-1}}Q$$

findet, hat man ferner:

$$17'' \qquad q = Qe^{-\frac{r}{2L}t}\left(\cos\varphi t + \frac{r}{2L\varphi}\sin\varphi t\right),$$

worin der Koeffizient von $\sin\varphi t$ in der Klammer eine reelle Grösse ist.

Die Ladung q ist also durch eine trigonometrische Funktion, multipliziert mit einer Exponentialfunktion, ausgedrückt. — Wäre der Faktor $e^{-\frac{r}{2L}t}$ nicht vorhanden, so würde q durch die Sinusfunktion

$$19' \qquad q = Q\left(\cos\varphi t - \frac{r}{2L\varphi}\sin\varphi t\right)$$

dargestellt sein, d. h. der Kondensator würde nach und nach periodisch entgegengesetzt gleiche Ladungen annehmen. Die Ordinaten dieser Sinusfunktion sind aber mit dem Faktor $e^{-\frac{r}{2L}t}$ zu multiplizieren, welcher mit dem Zunehmen von t abnimmt. Die Kurve, die q als Funktion der Zeit darstellt, besitzt dieselbe Periode wie die eben betrachtete Sinuskurve und schneidet die Abszissenachse in denselben Punkten wie letztere. Ihre Amplitude nimmt jedoch, anstatt einen konstanten Wert beizubehalten,

Thatsächlich sind die den Maximalwerten zugehörigen Abscissen durch
ı Ausdruck:

$$\cos \varphi t + \frac{r}{2L\varphi} \sin \varphi t = \pm 1$$

geben; es entsprechen ihnen die Ordinaten $q = \pm Qe^{-\frac{r}{2L}t}$.

Wenn wir mit ab und $a'b'$ (Fig. 150) die in bezug auf die Abscissen-
ıse symmetrisch gelegenen, durch die Gleichung $q = \pm Qe^{-\frac{r}{2L}t}$ darge-
llten Kurven bezeichnen,
lche von dem Punkte a mit
Ordinate Q, bezw. von dem
nkte a' mit der Ordinate $-Q$
gehen und sich asymptotisch
Achse Ot nähern, so giebt
Linie $amnra_1$, welche sich
ı die Achse Ot schlängelt und
e Maxima auf den Kurven ab
d $a'b'$ hat, die Momentan-
rte von q bei der Ent-
lung an.

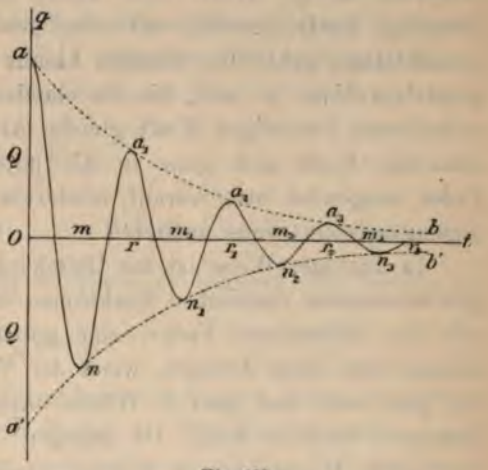


Fig. 150.

Der Differentialquotient $\frac{d\varphi}{dt}$
abwechselnd positiv und ne-
tiv, und folglich ist i eben-
lls durch eine einer Sinuskurve ähnliche Linie dargestellt, deren Maximal-
rte jedoch sinken.

In diesem Falle nimmt der Kondensator nach der ersten Entladung
ne entgegengesetzte Ladung an, welcher eine zweite Entladung folgt;
ese bringt eine neue Ladung in dem ursprünglichen Sinne hervor u. s. w.
e auf einander folgenden maximalen Ladungen haben abnehmende Werte.
eoretisch setzt sich diese Erscheinung bis ins Unendliche fort; praktisch
rden die Entladungen nach einer sehr kurzen Zeit nicht mehr be-
rklich.

Man sagt in diesem Falle, dass eine *oscillierende Entladung* vorliegt;
der That findet eine Oscillation der Elektrizität von einer zu der
deren Belegung des Kondensators statt. Wir können uns über die ver-
iedene Weise, in welcher die Entladung eines Kondensators je nach
n verschiedenen Zuständen des Stromkreises stattfindet, leicht Rechen-
haft geben, wenn wir uns auf analoge Erscheinungen in dem Gebiete
r Mechanik beziehen. Eine gespannte Feder beispielsweise befindet sich
einem Zwangszustande und entwickelt elastische Gegenwirkungen, durch

gewichtslage zurückzukehren,

d. h.: gt die Feder in einem Medium,

grossen Widerstand entgegen-
rte und jetzt sich entwickelnde

wobei φ eine ndung dieses Widerstandes auf-
werden, wie fol bedeutende lebendige Kraft und
wichtslage. Setzt das Medium da-

(17′) gegen, so ist die zur Überwindung
die Feder erlangt eine erhebliche

Dieser A wissen Geschwindigkeit die Gleich-
die Exponente ns und deformiert sich in entgegen-
stischen Kräfte eine der in der Feder
Arbeit verzehrt haben, d. h. bis die
potentielle Energie der deformierten

Durch rum dieselben Erscheinungen in ent-

q = elektrikum eines geladenen Kondensators
nen unterworfen und stellt uns, ebenso

und, da ma potentielle Energie dar; bei der Ent-
der Widerstand des Stromkreises gross
wärme umgesetzt, und die Ladung des Kon-
gegen der Widerstand klein, so ist auch

findet, ha vergeudete Energie gering, und der
Energie des Kondensators wird in die

(17″) ladungsstromes umgewandelt, durch deren
ch der Entladung des Kondensators fort-

worin d gesetzter Richtung wieder ladet, bis die
Die in die potentielle Energie des Konden-

multiplizi neue Ladung bringt dann dieselben Er-
scheinungen in entgegengesetztem Sinne hervor.

Faktor bei gleichen passiven Widerständen die

(19) sser, je grösser die Elastizität und die Masse
sind; bei der Entladung des Kondensators

darge gross, wenn L gegen r gross ist.

entgeg Frequenz der Entladung stimmen mit der
der durch die Formel (19) ausgedrückten

funkti Durch Vergleichung dieses Ausdruckes mit dem
dem Sinusgrösse ergiebt sich:

darst

schi

Amp

$$\varphi = 2\pi n = \frac{2\pi}{T},$$

$$n = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{1}{CL} - \frac{r^2}{4L^2}},$$

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{1}{CL} - \frac{r^2}{4L^2}}}.$$

Die Frequenz der Entladung hängt also von den Werten von C, L r ab; man kann dieselben beliebig variieren durch Änderung der pazität des Kondensators oder der Induktanz und des Widerstandes des omkreises.

Bei gleichen Werten von C und L nimmt die Frequenz mit dem nehmen von r zu; wenn C und L gegeben sind, erhält n seinen sten Wert für $r = 0$. Dieses Maximum ist:

$$n = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{1}{CL}}.$$

Für $r = 0$ hat man $\frac{1}{2L\varphi} = 0$ und $e^{-\frac{r}{2L}t} = 1$; folglich reduziert sich Kurve, die q darstellt, auf eine wirkliche Sinuskurve, für welche die ichung gilt:

$$q = Q \cos \varphi t.$$

Dies bedeutet, dass ein im Stromkreise erzeugter Strom unendlich ge fortdauern kann, ohne dass E. M. KK. im Stromkreise wirken, und kommen wieder auf den schon mehrmals betrachteten Fall der Reso- ren, da der eben entwickelte Wert von n der Bedingungsgleichung (13) ügt. Wir sehen hier, wie eine dem Kondensator einmal erteilte ung zur Erzeugung des Stromes genügt.

Bei einem gegebenen Werte von r wird man immer die Induktanz Entladungsstromkreises derart bestimmen können, dass die Entladung llierend ist und die gewünschte Frequenz besitzt. Theoretisch kann eliebig zwischen Null und ∞ variieren, aber praktisch sind die Werte n durch die Werte begrenzt, die man r, L und C zuschreiben kann; kann aber Entladungen mit sehr grosser Frequenz erzielen. So er- t Oliver Lodge bei seinen Versuchen Frequenzen zwischen $5 \cdot 10^2$ 10^8; Heinrich Hertz konnte Schwingungen mit Frequenzen über 0^8 erzeugen; Prof. Righi erreichte später auch Frequenzen von 10^8 und zur Zeit sind die grössten bei Entladungen erreichten Fre- nzen $5 \cdot 10^{10}$.

Um sehr kleine Kapazitäten und dementsprechend hohe Frequenzen erreichen, benutzte Hertz einfache ungeschlossene Leiterstücke: 3. zwei zylindrische, in einer Achse liegende stabförmige Leiter · Drähte.

131. Eigenschaften der Entladungsströme. Blitzableiter. Tesla-Ströme. — Im allgemeinen ist die Frequenz bei den Entladungsströmen viel höher als bei den in der Technik angewandten Wechselströmen; bei den ersteren müssen sich also alle Erscheinungen zeigen, die von dem periodischen Wechsel der Stromrichtung veranlasst sind, und sogar in hervorragendem Masse. Der Skin-Effekt hat hierbei auch für Leiter mit kleinem Durchmesser eine grosse Bedeutung und kann sogar so gross werden, dass der Strom sich auf einer dünnen Schicht an der Oberfläche des Leiters anhäuft, während der innere Teil desselben nicht ausgenutzt wird, derart, dass man, ohne den Widerstand dadurch zu vergrössern, den massiven Leiter durch einen röhrenförmigen, mit sehr dünnen Wänden versehenen Leiter ersetzen könnte.

Der Widerstand, den der Leiter in diesem Falle aufweist, ist viel grösser als derjenige, den man durch Anwendung des Ohm'schen Gesetzes ausrechnen könnte; auf den metallischen Widerstand übt in diesem Falle, bei oscillatorischen Entladungen, die Frequenz einen erheblicheren Einfluss aus als der spezifische Widerstand des Metalles. Auch der induktive Widerstand $\lambda = 2\pi n L$ wächst mit dem Zunehmen der Frequenz derart, dass der gesamte Widerstand, welchen der Leiter dem Durchgange des Stromes entgegensetzt und welchen Lodge auch *Impedanz* nennt, für grosse Werte der Frequenz erhebliche Werte erreichen kann.

Lodge stellte zur Bestätigung des Gesagten eine Reihe von elementaren Versuchen an, von denen wir einen erwähnen wollen.

Man verbinde die beiden Pole A und B (Fig. 151) einer elektrostatischen Maschine mit den inneren Belegungen zweier Leydner Flaschen, deren äussere Belegungen mit den beiden gegenüberliegenden Kügelchen a und b einer Funkenstrecke in Verbindung sind. Gleichzeitig mit einer Entladung zwischen A und B findet ebenfalls eine Entladung zwischen a und b statt. Der Versuch lehrt, dass ein lebhafter Funken zwischen a und b bestehen bleibt, selbst wenn die beiden äusseren Belegungen direkt durch einen metallischen Draht R mit sehr kleinem Ohm'schen Widerstand in Verbindung gesetzt werden, während dagegen zwischen a und b ein Luftzwischenraum vorhanden ist. Da der Strom sich in den beiden Zweigen R und ab in Teile verteilt, welche umgekehrt proportional den Impedanzen sind, so zeigt uns dieser Versuch, dass die

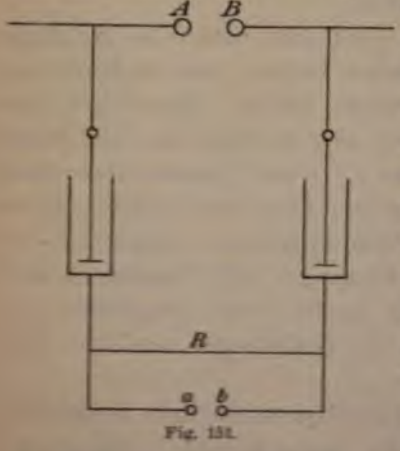


Fig. 151.

pedanz des Drahtes R viel grösser als der sehr grosse Widerstand s den Luftzwischenraum ab enthaltenden Zweiges ist.

Bei grossen Frequenzen wirkt der spezifische Widerstand des Metalles, s dem der Leiter besteht, auf die Impedanz nur noch sehr wenig ein, hrend dagegen die magnetische Permeabilität, von welcher die Induktanz d folglich der induktive Widerstand des Stromkreises abhängen, einen ieblichen Einfluss ausübt. Es ist hierbei zu bemerken, dass allmein durch Vergrösserung der Induktanz die Dauer der Periode grössert oder die Frequenz der Entladung verkleinert wird; einer rkleinerung der Frequenz entspricht eine Verringerung des Skinfektes und des induktiven Widerstandes, sodass die Impedanz durch Verndung eines aus magnetischem Material gebildeten Leiters kleiner ausIen kann.

Die Erscheinung ist aber nicht sehr einfach, und es ist nicht cht, die Verhältnisse der Impedanzen zweier Stromkreise, die in rm, Dimensionen und Substanz sich unterscheiden, zu bestimmen, nn dieselben von dem Entladungsstrome eines Kondensators durchssen werden.

Die eben angestellten Betrachtungen sind bei den Blitzentladungen n grossem Belang. Eine Blitzentladung kann mit der Entladung eines ndensators verglichen werden, dessen Belegungen Wolken und Erde sind. e Entladung kann oscillierend sein, und dies ist sogar der häufigste ll. Der Blitzableiter, der als ein Entladungskonduktor zwischen olke und Erde wirkt, kann eine grosse Impedanz besitzen, welche hr von dem induktiven Widerstand und dem Skin-Effekt, als von dem hm'schen Widerstand abhängt. Man kann also nur dann sicher sein, ss der Blitz diesem Wege folgt, wenn zwischen der Spitze des Blitzleiters und dem Boden eine Verbindung mit grosser Leitfähigkeit istiert; es kommt in der That vor, dass der Blitz nicht dem Blitzleiter, sondern einem Wege mit kleinerer Impedanz in dem zu schützenn Gebäude folgt.

Diese einfachen Betrachtungen genügen, zu beweisen, wie wenig Wert sog. Schutzzone im Verhältnisse zu der Länge der Stange hat, und e die alten Methoden für die Konstruktion der Blitzableiter zu verdern sind.

Die elektromagnetische Lichttheorie von Maxwell und die Versuche n Hertz, mit denen wir uns noch genauer zu beschäftigen haben rden, weisen darauf hin, die Verteilung der Energie für Beleuchtungsecke durch Ströme mit sehr grosser Frequenz als besonders vorteilhaft scheinen zu lassen. Nikola Tesla führte in dieser Hinsicht berkenswerte Versuche mit hochfrequenten Wechselströmen aus, die er

... maschinen, teils durch Entladung von Konden... Eine der überraschendsten hierbei konstatierten Erschei... ist die, dass Ströme von sehr hoher Spannung, welche bei den ... industrieller Verwertung gebräuchlichen Frequenzen ... durch den menschlichen Körper gefahrlos durch... Dies rührt daher, dass diese Ströme, wegen ihrer sehr ... an der Oberfläche entlang gleitend, das Innere des ... kaum durchfliessen.

Sechstes Kapitel.

Fortpflanzung der elektromagnetischen Schwingungen.

§ 1.

Maxwells elektromagnetische Lichttheorie.

132. Fortpflanzung einer elektromagnetischen Schwingung in einem vollkommen nichtleitenden Medium. — Wir haben gesehen, dass ein konstanter elektrischer Fluss, d. h. ein Gleichstrom, ausschliesslich in einem geschlossenen metallischen Stromkreise stattfinden kann, weil im Dielektrikum elastische Reaktionen entstehen, welche sich einer weiteren Verschiebung entgegensetzen und den Durchgang des Stromes verhindern. Wir haben ferner gesehen, dass für Wechselströme dagegen die Strombahn nicht geschlossen zu sein braucht, wenn sie Kondensatoren enthält, weil dann in letzteren eine Reihe von Ladungen und Entladungen stattfindet und das Dielektrikum abwechselnd entgegengerichteten Verschiebungen unterworfen ist. Dasselbe gilt, wie für das Dielektrikum eines Kondensators, für alle Dielektrika, und in der That können Verschiebungsströme im ganzen Raume auftreten. Clerk Maxwell gebührt das Verdienst, diese Hypothese zuerst klar zum Ausdruck gebracht zu haben, indem er deren Entwickelung seine ganze Arbeitskraft widmete.

Von einem rein logischen und mathematischen Standpunkte aus, dessen Einnahme mindestens bis zum Gegenbeweis als gerechtfertigt angesehen werden muss, betrachtete Maxwell die Verschiebungsströme unabhängig von ihren Trägern als Ströme, mit denselben Eigenschaften behaftet und denselben Gesetzen unterworfen, wie die elektrischen Ströme in den Leitern. Er setzte nämlich voraus, dass die Beziehungen zwischen dem Strome und dem von demselben hervorgebrachten magnetischen Felde und zwischen der Variation des magnetischen Flusses und der entsprechenden entstehenden E. M. K., wie sie für die Ströme in den Leitern gelten, auch im Falle der Verschiebungsströme bestehen. Nach der Maxwell'schen Auffassung können die Verschiebungsströme, abgesehen von der Verwandlung elektrischer Energie in Joule'sche Wärme, welche in den Leitern, aber nicht in den Dielektriken stattfindet, genau wie die gewöhnlichen elektrischen Ströme behandelt werden.

Von dieser Hypothese ausgehend, leitete Maxwell aus den allgemeinen Gleichungen, welche die elektrischen mit den magnetischen Kräften in gegenseitige Beziehung bringen, Gleichungen ab, welche alle Gesetze eines elektromagnetischen Feldes, d. h. die Gesetze bezüglich der Verteilung der elektrischen und magnetischen Kräfte und der Fortpflanzung ihrer Änderungen im Raume, zusammenfassen.

Wir werden in Anlehnung an die Grundgesetze des Elektromagnetismus die Maxwell'schen Gleichungen auf eine einfachere Weise herleiten, die sich von derjenigen Form, die Heinrich Hertz den Gleichungen gab, nur durch eine andere Annahme der Koordinatenachsen unterscheidet.

Die quantitativen Gesetze, welche die elektrischen mit den magnetischen Erscheinungen in Beziehung bringen [109], können wie folgt ausgedrückt werden:

$$(\alpha) \qquad 4\pi i = \int_{C_1} \mathfrak{H}_s ds$$

$$(\beta) \qquad -\frac{d\varphi}{dt} = \int_{C_2} F_s ds,$$

wobei C_1 eine geschlossene, mit den Stromträgern i verkettete Linie ist und C_2 eine ebenfalls geschlossene Linie, durch welche der Fluss φ hindurchgeht.

Wir nehmen nach Maxwell an, dass diese beiden Beziehungen auch für die Verschiebungsströme gelten, und beziehen die Punkte des Raumes auf ein System von orthogonalen Koordinatenachsen $O(xyz)$, die derart angeordnet sind, dass die Achse Oy für einen in der Richtung Ox blickenden Beschauer in dem Sinne des Uhrzeigers rotieren muss, um mit der Achse Oz zusammenzufallen.

Betrachten wir im Raume einen Punkt A (Fig. 152) mit den Koordinaten x, y und z, in welchem die Komponenten der elektrischen Kaft F und der magnetischen Kraft $\mathfrak{H}$ nach den Koordinatenachsen bezw. die Werte X, Y, Z und L, M, N besitzen. Die positive Richtung für die Achsen gilt hierbei auch als positive Richtung für die Kraft. Mit ε sei die Dielektrizitätskonstante und mit μ die magnetische Permeabilität des Mediums im Punkte P bezeichnet. Die Kräfte F und $\mathfrak{H}$ sind Funktionen der Zeit und der Koordinaten.

Wir setzen zunächst voraus, dass es sich um ein vollkommen isolierendes Medium handele, sodass in demselben keine Leitungsströme, sondern nur Verschiebungsströme vorhanden sind und folglich keine Energiemenge unter der Form von Wärme verzehrt wird; wir nehmen ferner an, das Medium sei isotrop, d. h. ε und μ seien für alle Richtungen konstant.

Wir wollen nacheinander die beiden Beziehungen (α) und (β) auf drei unendlich kleine Rechtecke anwenden, die ihre gemeinsame Spitze in

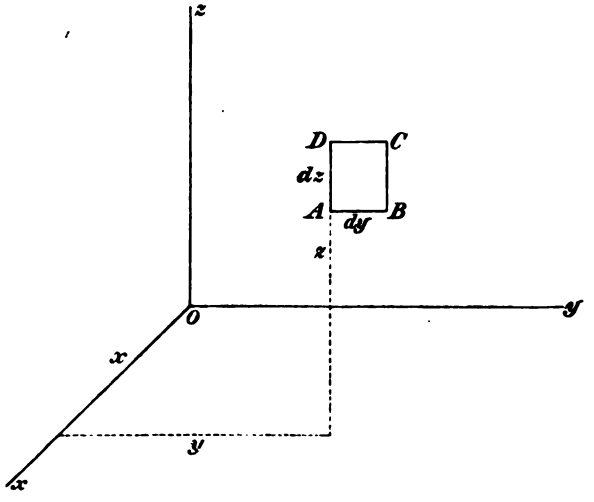


Fig. 152.

A haben und in Ebenen liegen, die bezw. senkrecht zu den Koordinatenachsen sind.

Betrachten wir zunächst das zur Achse Ox senkrechte Rechteck $ABCD$ mit den Seiten dy und dz und wenden wir auf dasselbe die Beziehung (α) an. Die elektrische Verschiebung hat im Punkte A (10′) [44] den Wert:

$$b = \frac{\varepsilon}{4\pi} F;$$

ihre Komponente nach der Achse Ox ist gleich:

$$\frac{\varepsilon}{4\pi} X,$$

und folglich ist der Verschiebungsfluss durch das Rechteck gegeben durch den Ausdruck:

$$\frac{\varepsilon}{4\pi} X dy dz.$$

Die auf die Zeiteinheit bezogene Änderung dieses Flusses ist, wenn ∂X die Änderung der Komponenten X in der Zeit ∂t darstellt, gleich:

$$\frac{\varepsilon}{4\pi} \frac{\partial X}{\partial t} dy dz,$$

d. h. dieser Ausdruck giebt uns die Intensität i des Verschiebungsstromes innerhalb der Begrenzung des Rechteckes in der Richtung Ox.

Es ist jedoch zu beachten, dass der Verschiebungsstrom, wenn ε und X in elektrostatischen Einheiten ausgedrückt sind, sich ebenfalls in diesen

Einheiten ergiebt, während derselbe dagegen in Formel (α) in elektromagnetischen Einheiten ausgedrückt ist. Man wird daher, wenn v*) das Verhältnis der elektromagnetischen zur elektrostatischen Einheit der Stromstärke bedeutet, das erste Glied der Formel (α) folgendermassen schreiben müssen:

$$\frac{\varepsilon}{v}\frac{\partial X}{\partial t}dydz.$$

Wir betrachten nun das zweite Glied der Formel (α). Bei der Berechnung des Integrals der magnetischen Kraft muss das Rechteck, infolge der getroffenen Wahl der positiven Richtungen, in dem Sinne $ABCD$ durchlaufen werden, d. h. in dem Sinne, in welchem der Maxwell'sche Korkzieher rotieren muss, um in der Richtung Ox fortzuschreiten. Die Tangentialkomponente der magnetischen Kraft hat bezw. den Wert M für die Punkte der Seite AB, $N+\frac{\partial N}{\partial y}dy$ für diejenigen der Seite BC, $M+\frac{\partial M}{\partial z}dz$ für CD und N für DA, wobei zu beachten ist, dass die den Seiten CD und DA entsprechenden Posten negativ sind. Das Integral der magnetischen Kraft über das elementare Rechteck ist also durch

$$\left[\left(N+\frac{\partial N}{\partial y}dy\right)-N\right]dz+\left[M-\left(M+\frac{\partial M}{\partial z}dz\right)\right]dy=\left(\frac{\partial N}{\partial y}-\frac{\partial M}{\partial z}\right)dydz$$

ausgedrückt. Es ist also:

$$\frac{\varepsilon}{v}\frac{\partial X}{\partial t}dydz=\left(\frac{\partial N}{\partial y}-\frac{\partial M}{\partial z}\right)dydz$$

oder:

$$\frac{\varepsilon}{v}\frac{\partial X}{\partial t}=\frac{\partial N}{\partial y}-\frac{\partial M}{\partial z}.$$

Durch gleiches Vorgehen bei den anderen Rechtecken erhält man zwei analoge Beziehungen, die man aus der vorstehenden Gleichung direkt durch zyklische Vertauschung der algebraischen Grössen leicht ermitteln kann.

Man hat so für einen Punkt des Dielektrikums die drei Beziehungen:

$$(1)\qquad \begin{cases} \frac{\varepsilon}{v}\frac{\partial X}{\partial t}=\frac{\partial N}{\partial y}-\frac{\partial M}{\partial z}, \\ \frac{\varepsilon}{v}\frac{\partial Y}{\partial t}=\frac{\partial L}{\partial z}-\frac{\partial N}{\partial x}, \\ \frac{\varepsilon}{v}\frac{\partial Z}{\partial t}=\frac{\partial M}{\partial x}-\frac{\partial L}{\partial y}. \end{cases}$$

*) Siehe den Anhang über die Masseinheiten.

Aus den beiden Systemen der partiellen Differentialgleichungen (1) und (2), welche das Gleichgewicht und die Variationen sowohl des elektrischen als auch des magnetischen Kraftflusses in einem isotropen, vollkommen isolierenden Medium bestimmen, geht hervor, dass eine in ein em beliebigen Punkte des Mediums erzeugte Variation sich im Raume in ähnlicher Weise fortpflanzt, wie eine Gleichgewichtsstörung in den elastischen Körpern. Wir wollen die vollständige Behandlung dieses Gegenstandes unterlassen und uns auf die Betrachtung eines besonderen Falles beschränken.

133. Besonderer Fall. Fortpflanzung durch ebene Wellen. — Nehmen wir an, die elektrische Kraft F sei in jedem Punkte parallel zur Achse Oz und besitze in einem und demselben Augenblicke denselben Wert für alle Punkte einer zur Achse Ox senkrecht gelegenen Ebene; die Kraft F ist alsdann eine Funktion von x und t und ist unabhängig von y und z, man hat nämlich:

$$X = 0, \qquad Y = 0, \qquad Z = F = \varphi(x, t).$$

Demnach ergeben die Gleichungen (1):

$$\text{(1a)} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial N}{\partial y} - \dfrac{\partial M}{\partial z} = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial z} - \dfrac{\partial N}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial M}{\partial x} - \dfrac{\partial L}{\partial y} = \dfrac{\varepsilon}{v}\dfrac{\partial Z}{\partial t}. \end{cases}$$

und die Gleichungen (2):

$$\text{(2a)} \qquad \begin{cases} \dfrac{\mu}{v}\dfrac{\partial L}{\partial t} = 0 \\ \dfrac{\mu}{v}\dfrac{\partial M}{\partial t} = \dfrac{\partial Z}{\partial x} \\ \dfrac{\mu}{v}\dfrac{\partial N}{\partial t} = 0. \end{cases}$$

Betrachten wir speziell die Gleichungen:

$$\frac{\varepsilon}{v}\frac{\partial Z}{\partial t} = \frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial y}, \qquad \frac{\mu}{v}\frac{\partial M}{\partial t} = \frac{\partial Z}{\partial x}.$$

Durch Differentiation der zweiten Gleichung nach x und der ersten nach t erhalten wir:

$$\frac{\mu}{v}\frac{\partial^2 M}{\partial x \partial t} = \frac{\partial^2 Z}{\partial x^2}$$

$$\frac{\varepsilon}{v}\frac{\partial^2 Z}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 M}{\partial x \partial t} - \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial t};$$

und ferner unter Berücksichtigung, dass zufolge der ersten der Gleichungen (2a)

$$\frac{\partial^2 L}{\partial y \partial t} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial L}{\partial t} = 0$$

ist, und durch Elimination des Ausdruckes $\frac{\partial^2 M}{\partial x \partial t}$:

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial t^2} = \frac{v^2}{\varepsilon\mu}\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2}. \tag{3}$$

Diese Gleichung ist identisch mit derjenigen, die in der Akustik für die Fortpflanzung des Schalles in einem zylindrischen Rohre, in einer elastischen Saite und dergl. vorkommt. Ist f eine beliebige willkürliche Funktion, so ist einleuchtend, dass

$$Z = f\left(x \pm \frac{v}{\sqrt{\varepsilon\mu}}t\right)$$

ein partikuläres Integral der Gleichung (3) ist. — Und zwar, wenn wir mit f' und f'' den ersten und den zweiten Differentialquotienten von f bezeichnen, ist

$$\frac{\partial Z}{\partial x} = f', \qquad \frac{\partial Z}{\partial t} = \pm\frac{v}{\sqrt{\varepsilon\mu}}f',$$

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} = f'', \qquad \frac{\partial^2 Z}{\partial t^2} = \frac{v^2}{\varepsilon\mu}f'',$$

sodass die Gleichung (3) erfüllt ist.

Da die Funktion f willkürlich ist, so sind die Ausdrücke:

$$Z_1 = f_1\left(x - \frac{v}{\sqrt{\varepsilon\mu}}t\right),$$

$$Z_2 = f_2\left(x + \frac{v}{\sqrt{\varepsilon\mu}}t\right),$$

wobei f_1 und f_2 beliebige Funktionen sind, Integrale der Gleichung (3). Ihre Summe:

$$Z = f_1\left(x - \frac{v}{\sqrt{\varepsilon\mu}}t\right) + f_2\left(x + \frac{v}{\sqrt{\varepsilon\mu}}t\right), \tag{4}$$

ist dann deren allgemeines Integral. Die beiden willkürlichen Funktionen werden durch die Anfangsbedingungen, d. h. durch Einführung der Werte von Z und $\frac{\partial Z}{\partial t}$ für $t = 0$ bestimmt.

Um uns über die Bedeutung der allgemeinen Fortpflanzungsgleichung Rechenschaft zu geben, wird es zweckmässig sein, die beiden vorher betrachteten partikulären Integrale getrennt zu untersuchen.

Wir betrachten zunächst das Integral:

$$Z = f_1\left(x - \frac{v}{\sqrt{\varepsilon\mu}}t\right).$$

Es seien x, t und x', t' zwei Paare von Werten, welche der Gleichung genügen:

$$x - \frac{v}{\sqrt{\varepsilon\mu}} t = x' - \frac{v}{\sqrt{\varepsilon\mu}} t'$$

oder:

$$x' - x = \frac{v}{\sqrt{\varepsilon\mu}} (t' - t)$$

Genüge leisten.

Die Kraft Z wird am Ende der Zeit t' in der Entfernung x' vom Koordinaten-Mittelpunkte O denselben Wert haben, wie am Ende der Zeit t in der Entfernung x. Man kann also sagen, dass der Wert der Kraft Z sich in der Zeit $t' - t$ von der Entfernung x zu der Entfernung x' übertragen hat, d. h. dass eine Änderung des Wertes von Z, welche in der um x von dem Koordinaten-Mittelpunkte entfernt und zur Achse Ox senkrecht gelegenen Ebene erzeugt wird, sich in dieser nach der Zeit $t' - t$ in der Entfernung x' bemerkbar macht. Mit anderen Worten, die Kraft Z pflanzt sich in der Richtung der Achse Ox mit einer konstanten Geschwindigkeit fort, deren Wert gleich

$$\frac{x' - x}{t' - t} = \frac{v}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$$

ist.

Wenn wir, wie es bei dem Studium der Fortpflanzung der schwingenden Bewegungen üblich ist, als *Wellenfläche* jene Fläche definieren, in deren sämtlichen Punkten in einem und demselben Augenblicke die sich fortpflanzende Grösse denselben Wert hat, so können wir sagen, dass die Kraft sich in diesem Falle durch ebene Wellen in der zu ihrer Ebene senkrechten Richtung mit der konstanten Geschwindigkeit $\frac{v}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$ ausbreitet.

Ganz analoge Betrachtungen gelten auch für das andere partikuläre Integral $Z = f_2\left(x + \frac{v}{\sqrt{\varepsilon\mu}} t\right)$.

Dieses stellt eine ebene Welle dar, welche sich nach denselben Gesetzen, aber in entgegengesetzter Richtung wie die vorige fortpflanzt.

Aus diesen Betrachtungen über die beiden Funktionen f_1 und f_2 geht hervor, dass das allgemeine Integral (4) das gleichzeitige Vorhandensein zweier Wellensysteme darstellt, welche sich längs der Achse Ox in entgegengesetztem Sinne mit denselben Geschwindigkeiten fortpflanzen.

Sind f_1 und f_2 periodische Funktionen der Zeit mit der Periode T und der Frequenz $n = \frac{1}{T}$, so ist die in einer Periode zurückgelegte Entfernung:

$$\lambda = \frac{v}{\sqrt{\varepsilon\mu}} T; \tag{5}$$

t: *Wellenlänge.* Zwei in der Entfernung λ von einander gelegene ind in jedem Moment in derselben Schwingungsphase.

den Gleichungen (1a) und (2a) können wir fernerhin den Wert gnetischen Kraft ermitteln. Nach der ersten und dritten der gen (2a) sind die Komponenten L und N unabhängig von der l folglich ist, unter der Annahme, das Feld sei vor dem Eintreten achteten Störungen in Ruhe gewesen, und es seien keine freien chen Massen vorhanden:

$$L = 0, \qquad N = 0.$$

selben Gleichungen, aus denen wir Z durch Elimination von M haben, geben durch Elimination von Z:

$$\frac{\partial^2 M}{\partial t^2} = \frac{v^2}{\varepsilon\mu}\frac{\partial^2 M}{\partial x^2}.$$

schliessen daraus, dass die magnetische Kraft in jedem Punkte zur Achse Oy gerichtet ist und einen gleichen Wert für alle einer zur Achse Ox senkrechten Ebene besitzt; die Kraft pflanzt ch ebene Wellen in der positiven und in der negativen Richtung se Ox mit derselben Geschwindigkeit $\frac{v}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$ fort.

elektrischen und die magnetischen Kräfte stehen also zu ein- enkrecht und sind beide transversal in bezug auf die Fort- gsrichtung; sie breiten sich durch Schwingungen aus, genau so, bei den Deformationen in einem elastischen Medium und bei den wingungen der Fall ist.

h grösser ist die Analogie mit der Fortpflanzung des Lichtes und lenden Wärme, weil die Wärme- und die Lichtschwingungen eben- e die elektromagnetischen senkrecht zur Fortpflanzungsrichtung nt parallel zu derselben, wie die Schwingungen bei dem Schalle,

besondere Fall, den wir betrachtet haben, entspricht genau der nzung eines in einer bestimmten Ebene polarisierten Lichtstrahles. Fortpflanzungsgeschwindigkeit in einem elektromagnetischen Felde on der Dielektrizitätskonstanten und von der magnetischen Per- it des Mediums ab. In dem Vakuum, in der Luft, und allgemein fasen, für welche $\varepsilon = 1$ und $\mu = 1$ gilt, ist diese Geschwindigkeit em konstanten Faktor v, welcher dem Verhältnisse der elektro- chen zur elektrostatischen Einheit der Stromstärke entspricht und ensionen einer Geschwindigkeit besitzt*).

*) Siehe den Anhang über die Masseinheiten.

Schwingung in einem

ener Isolator ist,

ströme zu berück-

Verschiebungs- und

orthogonalen Koordi-

d. h. des durch die

magnetischen Ein-

Fig. 152) fliessende

sind die Leitungs-

O und Oy senk-

diesem Falle führt

ist

des in elektromag-

dem Produkte [54] das Pro-

der elektrischen Kraft ist,

$$= Z.$$

sen

magnetischen Einheiten aus-

auch wie folgt ge-

Integ

setze

hervo

zwei

gegen

isotrop ist.

und d

Schwingung in einem

fernun

eines voll-

(5)

machten. Weil

sehr gross ist, wird man auch durch kleine Werte der elektrischen bedeutende Leitungsströme hervorbringen, und folglich wird man rschiebungsströme im Vergleiche zu den Leitungsströmen vernach- ı können. Die Gleichungen (1″) gehen über in:

$$\begin{cases} 4\pi c v X = \dfrac{\partial N}{\partial y} - \dfrac{\partial M}{\partial z} \\ 4\pi c v Y = \dfrac{\partial L}{\partial z} - \dfrac{\partial N}{\partial x} \\ 4\pi c v Z = \dfrac{\partial M}{\partial x} - \dfrac{\partial L}{\partial y}, \end{cases}$$

d die Gleichungen (2) unverändert bleiben.

dem besonderen Falle, in welchem die Kraft F in jedem Punkte l zur Achse Oz ist und den gleichen Wert für alle Punkte einer ht zur Achse Ox gelegten Ebene besitzt, d. h. in welchem

$$X = 0, \qquad Y = 0, \qquad Z = F = \varphi(x, t)$$

luzieren sich die Gleichungen auf:

$$\begin{cases} 0 = \dfrac{\partial N}{\partial y} - \dfrac{\partial M}{\partial z} \\ 0 = \dfrac{\partial L}{\partial z} - \dfrac{\partial N}{\partial x} \\ 4\pi c v Z = \dfrac{\partial M}{\partial x} - \dfrac{\partial L}{\partial y} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\mu}{v}\dfrac{\partial L}{\partial t} = 0 \\ \dfrac{\mu}{v}\dfrac{\partial M}{\partial t} = \dfrac{\partial Z}{\partial x} \\ \dfrac{\mu}{v}\dfrac{\partial N}{\partial t} = 0. \end{cases}$$

urch dasselbe Verfahren, welches wir bereits für den Fall eines rischen Mediums eingeschlagen haben, finden wir folgende partielle ntialgleichung:

$$\frac{\partial Z}{\partial t} = \frac{1}{4\pi c\mu}\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2},$$

das Problem löst und identisch mit der Gleichung ist, welche in ıermodynamik für die Fortpflanzung der Wärme in den leitenden n gilt. Die Kraft Z pflanzt sich also in diesem Falle wie die ratur fort.

uch ohne dass die Integration der Gleichung (6) ausgeführt wird, n diese Betrachtungen zur Kennzeichnung der Natur der Erschei-

134. Fortpflanzung einer elektromagnetischen Schwingun beliebigen Medium. — Wenn das Medium kein vollkommene so sind auch die in demselben entstehenden Leitungsströ sichtigen, und wir werden dabei voraussetzen, dass die Ver die Leitungsströme sich superponieren.

Bezeichnen wir mit u_x, u_y und u_z die nach drei orth natenachsen gebildeten Komponenten der Stromdichte, Flächeneinheit fliessenden Leitungsstromes, in elektr heiten ausgedrückt. Der durch das Rechteck $ABCD$ Leitungsstrom ist gleich $u_x dydz$; in analoger We ströme durch die unendlich kleinen, zu den Ach rechten Rechtecke bezw. $u_y dxdz$ und $u_z dxdy$: die Beziehung (α) zu den Gleichungen:

$$(1') \qquad \begin{cases} \frac{\varepsilon}{v}\frac{\partial X}{\partial t} + 4\pi u_x = \frac{\partial N}{\partial y} \\ \frac{\varepsilon}{v}\frac{\partial Y}{\partial t} + 4\pi u_y = \frac{\partial L}{\partial} \\ \frac{\varepsilon}{v}\frac{\partial Z}{\partial t} + 4\pi u_z = \end{cases}$$

Die Gleichungen (2) bleiben unver

Bedeutet c die spezifische Leitfäh netischen Einheiten, so ist, da die Di dukt der spezifischen Leitfähigkeit

$$u_x = cvX, \qquad u_y =$$

wobei auch die Kraftkomponente gedrückt sind; demnach können schrieben werden:

$$(1'') \qquad \begin{cases} \frac{\varepsilon}{v}\frac{\partial X}{\partial t} + \\ \frac{\varepsilon}{v}\frac{\partial Y}{\partial t} \\ \frac{\varepsilon}{v}\frac{\partial Z}{\partial t} \end{cases}$$

In dem allgemeinen sind ε und μ als Variabl

135. Fortpflanzung vollkommen leitenden kommen dielektrischen gesetzten Grenzfall ein

nung in diesem
t in einer sen
Mittelpunkte g
Ebene in der
Zeit $t' - t$ ebe
nicht um die
stanter Geschw
Fortpflanzung.

Wenn wi
von x eine p
periodische V
einander folge
breitung dure
unfähig, die e
und verhalten
Körper in bez

Wir hab
welchem die
das Medium
Leiter; es sin
andere Fälle
Leitungsströme
dann nach an
annehmen, abe
werden könne

136. Maxw
deren hauptsäc
well seine epoc
Lichtgeschwind
elektrostatische
dass ihre Werte
selben sich nic
die Differenzen
stimmten Wert
gebracht, dass
zwischen der A
zität bestehe.

Die Maxw
magnetischen E
ganzen Raum a

geschwindigkeit dieser elektrischen Kräfte und des Lichtes übereinstimmen, und endlich, dass bei der Fortpflanzung der elektromagnetischen Schwingungen dieselben Erscheinungen der Reflexion, Brechung, Polarisation etc. auftreten, wie bei der Fortpflanzung des Lichtes.

Die von Hertz aufgenommenen experimentellen Untersuchungen galten also dem Studium der Ausbreitung der Veränderungen elektrischer und magnetischer Kräfte im Raume. Es schien von vornherein zweckmässig, mit periodischen Veränderungen von grosser Frequenz zu arbeiten, und mithin ergaben sich die beiden folgenden praktischen Aufgaben:

1. Elektrische Schwingungen kontinuierlich zu erzeugen, d. h. die elektrische Kraft F nach einer periodischen Funktion der Zeit variieren zu lassen. Die Frequenz der Schwingungen sollte sehr gross sein, um unreichend kleine, innerhalb der Räume eines Laboratoriums enthaltene Wellenlängen zu erlangen.

2. Ein Mittel zu finden, um diese Schwingungen in dem dielektrischen Medium (Luft) wahrnehmen zu können.

138. Praktische Anordnung der Hertz'schen Versuche. Erreger. Resonator. — Zur Erzeugung der elektrischen Schwingungen benutzte Hertz, um grosse Frequenz zu erzielen, die Entladung eines Kondensators von kleiner Kapazität. Die oscillierende Entladung eines Kondensators ist eine Erscheinung, welche sich, obwohl in einer sehr grossen Anzahl von Schwingungen bestehend, in sehr kurzer Zeit abspielt. Durch aufeinander folgende, in sehr kleinen Zeitintervallen stattfindende Ladungen kann man eine genügend rasche Aufeinanderfolge oscillierender Entladungen erhalten, mit welchen man wie mit periodischen Schwingungen zu experimentieren vermag.

Wir wollen hier nur die von Hertz dazu benutzte Anordnung erwähnen. Sein *Oscillator* oder *Erreger* (Fig. 153) besteht aus einem einen Luftkondensater, gebildet aus zwei metallischen Stäbchen, welche an einer Seite in zwei in einer Entfernung von einander gegenüberliegenden Kügelchen a und b und an der anderen in zwei Platten A und B von passender Oberfläche endigen. Ladet man diesen Kondensator so weit, bis die Potentialdifferenz zwischen den Belegungen einen gewissen Wert erreicht hat, so findet die Entladung statt, d. h. ein Funken springt

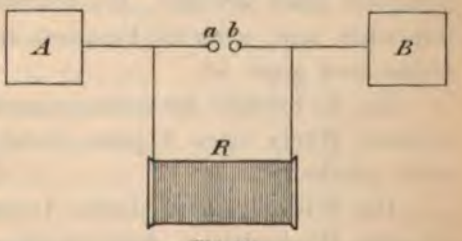


Fig. 153.

zwischen den beiden Entladungskugeln a und b über. Die Abmessungen des Apparates sind solche, dass die Ladung eine oscillierende ist. Durch Veränderung der Länge der Stäbe, d. h. des Widerstandes und der Induktanz des Stromkreises, und durch Veränderung der Grösse der Platten, d. h. der Kapazität des Kondensators, kann man die Frequenz der Entladung variieren.

Die beiden Stäbe des Oscillators stehen in Verbindung mit den Polen eines Induktionsapparates; die induzierten Ströme in der sekundären Wickelung der Spule bringen die aufeinander folgenden Ladungen des Kondensators hervor.

Man kann sich ein Bild davon, wie die Schwingungen in dem Hertzschen Erreger entstehen, durch Vergleichung dieser mit ähnlichen Erscheinungen bei den Schallwellen machen. So hat man z. B. durch mehrere rasch aufeinander folgende Bogenstriche auf einer Geigensaite, von denen jeder, bevor die von diesem erzeugten Schwingungen aufgehört haben, dem vorigen folgt, den Eindruck eines kontinuierlichen Tones; dasselbe geschieht bei den Schlaginstrumenten durch eine rasche Aufeinanderfolge von Klöppelschlägen auf die vibrierenden Membranen.

Die Erscheinung ist in unserem Falle eine vollständig analoge; die Ströme in der Spule, welche der Reihe nach die Ladungen des Kondensators hervorbringen, entsprechen den Bogenstrichen oder den Klöppelschlägen, welche die aufeinander folgenden Erregungen der Saite oder der Membrane bewirken; wie nun aber die Frequenz der Schallwellen diejenige der Schwingungen der Saite oder der Membrane und nicht diejenige, mit welchen diesen schwingungsfähigen Körpern Impulse der Reihe nach erteilt werden, ist, so ist die Frequenz der durch eine Entladung hervorgerufenen elektrischen Oscillation durch die Zustände der Strombahn und nicht durch die Stärke und Unterbrechungszahl des primären Stromes in der Spule bestimmt; ferner werden in unserem Falle, wie bei den Schallschwingungen der Ton kontinuierlich erscheint, wenn die Impulse genügend rasch erfolgen, die elektrischen Schwingungen praktisch kontinuierlich sein, wenn die Frequenz der primären Stromstösse in der Spule hinreichend gross ist.

Um die Existenz der elektromagnetischen Schwingungen wahrzunehmen, benutzte Hertz einen Apparat, welchem er den Namen *elektrischer Resonator* erteilte.

Die Wirkungsweise dieses Apparates beruht auf den Eigenschaften der von Wechselstrom durchflossenen Strombahnen bei gewissen gegenseitigen Beziehungen zwischen Kapazität, Induktanz und Widerstand [120], [122], [130].

Wir haben gesehen, dass in einem Stromkreise, in welchem der

Ohm'sche Widerstand gleich Null angenommen werden kann und zwischen der Induktanz und der Kapazität die Beziehung

$$4\pi^2 n^2 LC = 1$$

besteht, auch sehr kleine E. M. KK. erhebliche Stromstärken zur Folge haben können, welche, einmal erzeugt, sehr lange weiter fortdauern; diese Erscheinung beruht auf dem Auftreten vieler aufeinander folgender Ladungen und Entladungen des Kondensators ohne Energievergeudung, d. h. auf einer periodischen Umsetzung von elektrischer in magnetische Energie und umgekehrt. Die Stromfrequenz in diesem Stromkreise ist:

7) $$n = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

Ist der Widerstand r des Stromkreises nicht gleich Null, jedoch sehr klein, so ist auch die in Wärme gemäss dem Joule'schen Effekt umgesetzte Energiemenge sehr gering, die Erscheinungen werden sich in grosser Annäherung an den ideellen Grenzfall abspielen, und die Stromfrequenz wird noch als durch die Formel (7) ausgedrückt angenommen werden können.

Es bedarf, um ein Gebilde zu erhalten, welches fähig ist, auf elektrische Schwingungen von grosser Frequenz zu resonieren, einer sehr kleinen Kapazität.

Eine von den von Hertz gewählten Anordnungen besteht in einem einfachen Draht aMb (Fig. 154), welcher in einem Kügelchen und einer Spitze, oder in zwei Kügelchen endigt.

Das System bildet einen Kondensator mit sehr kleiner Kapazität, dessen Belegungen durch einen metallischen Bogen verbunden sind.

Geben wir dem Stromkreise aMb in dem elektromagnetischen Felde eine solche Lage, dass dessen Ebene senkrecht zu der Richtung der magnetischen Kraft steht, so bringt eine Änderung dieser Kraft eine Änderung des Flusses durch den Stromkreis und mithin eine E. M. K. in demselben hervor. Sind ferner die Änderungen der magnetischen Kraft periodisch und besitzen dieselben eine passende Frequenz, so addieren sich die im Stromkreise erzeugten E. M. KK., und man kann zwischen a und b Potentialdifferenzen erreichen, welche im Dunkeln sichtbare Fünkchen erzeugen. Dieser Apparat giebt uns also ein Mittel an die Hand, elektromagnetische Schwingungen von bestimmter Frequenz im Raume wahrzunehmen und nachzuweisen.

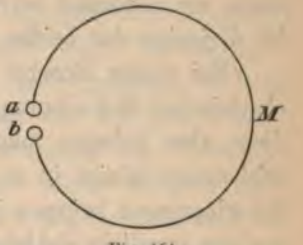


Fig. 154.

Die Wirkungsweise des elektrischen Resonators ist vollständig analog derjenigen der Resonatoren in der Schalllehre. Eine gespannte Saite, welche einen Grundton von bestimmter Höhe und Frequenz zu geben vermag, wird durch Resonanz mit einem anderswo in der Umgebung erzeugten Tone, der selbst schwach, aber im Einklang mit dem Eigentone der Saite ist, zum Mitschwingen veranlasst; die aufeinander folgenden Schwingungen der Saite addieren sich, vergrössern ihre Weite und geben in deutlicher Weise den Ton wieder. Genau so übertragen sich die elektromagnetischen Schwingungen auf den Resonator und summieren sich, bis sie merkliche Wirkungen hervorbringen.

Die elektrischen Resonatoren können vielfach gestaltet sein; man kann sogar sagen, dass ein beliebiges nicht vollständig geschlossenes System von Leitern mit kleinem Widerstand und passender Kapazität und Induktanz einen Resonator bilden kann.

Einer von den von Hertz am meisten benutzten Resonatoren ist der geradlinige: das Gegenstück zu dem oben beschriebenen Oscillator. Zwei Stäbe (Fig. 155), in derselben Geraden liegend, endigen in zwei gegenüberliegenden Kügelchen a' und b'; die entgegengesetzten Enden der Stäbe tragen zwei metallische Platten A' und B', von deren Flächeninhalte die Kapazität des Systems abhängt.

Dieser Resonator bildet einen Stromkreis, der zweimal unterbrochen ist, nämlich zwischen a' und b' und zwischen A' und B', und kann mit einem Stromkreise verglichen werden, in welchen zwei Kondensatoren hintereinander geschaltet sind. In diesem Falle ist die Richtung, die die elektrische Kraft besitzen muss, um Resonanz hervorzubringen, unmittelbar bestimmt; diese Richtung ist diejenige der beiden Stäbchen.

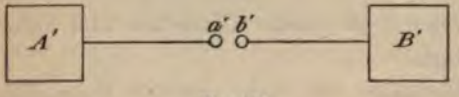


Fig. 155.

Bei einem Erreger der oben geschilderten Form (Fig. 153) sind die elektrischen Schwingungen parallel zur Richtung ab des Erregers selbst; diese aber bringen magnetische Schwingungen hervor, welche längs geschlossener Linien in zu ab senkrechten Ebenen erfolgen, die magnetischen Schwingungen bringen ihrerseits andere zu ihnen senkrechte, d. h. zu den vorigen parallele elektrische Schwingungen hervor u. s. w. Auf diese Weise findet die Fortpflanzung der Schwingungen statt. Befindet sich der Resonator (Fig. 155) in dem Medium, in welchem sich die Schwingungen ausbreiten, mit seiner Achse $a'b'$ parallel zur Achse des Erregers, d. h. parallel zur Richtung der elektrischen Kraft, so entstehen zwischen a' und b' Potentialdifferenzen, welchen die Resonanz ihre Entstehung verdankt; ist dagegen die Achse des Resonators senkrecht zur Achse des Er-

regers, so kann die elektrische Kraft, weil senkrecht zur Richtung $a'b'$, keine Potentialdifferenz hervorrufen, und der Resonator kann nicht mehr wirken.

Bei anderen Versuchen benutzte Hertz als Resonator und Erreger zwei einfache Messingröhren, an den Enden durch zwei Halbkugeln geschlossen und in geringem gegenseitigem Abstande koaxial aufgestellt.

In diesen Fällen ist es immer möglich, die Kapazität und die Induktanz des Erregers und des Resonators ungefähr zu berechnen und so einen angenäherten Wert der Frequenz der von ersterem erzeugten Schwingungen, auf welche letzterer resonieren soll, zu ermitteln.

Hertz erreichte bei den vorher beschriebenen Anordnungen des Erregers und des Resonators Wellenlängen von 3 bis 4 m.; bei der letzten Anordnung konnte er noch kleinere Wellenlängen erreichen, sogar eine Länge von 30 cm., welcher eine Frequenz von 10^9 entspricht.

Die von Hertz bei seinen Versuchen verwendeten elektrischen Schwingungen besitzen eine viel geringere Frequenz als die Lichtschwingungen, da die Frequenz des grünen Lichtes, die als mittlere Frequenz des Lichtspektrums angenommen werden kann, sich auf ungefähr 600.10^{12} beläuft, d. h. auf etwa ein Millionfaches derjenigen der Hertzschen Schwingungen.

139. Experimentelle Ergebnisse. — Wir wollen im Folgenden einige der wichtigsten Ergebnisse, zu denen Hertz auf experimentellem Wege unter Benutzung der oben beschriebenen Erreger und Resonatoren gelangte, erwähnen.

Vor allem konstatierte Hertz, dass die elektromagnetischen Schwingungen sich thatsächlich durch das Dielektrikum fortpflanzen. Zu diesem Zwecke stellte er einen Erreger und einen Resonator mit parallelen Achsen einander gegenüber auf; die beiden Apparate waren so bemessen, dass sie dieselbe Frequenz besassen, was Hertz durch geeignete Berechnungen angenähert und dann durch Korrektionen aus der gewonnenen Erfahrung genauer erreichte. Bei der Bethätigung des Erregers sprangen zwischen den Kügelchen des Resonators kleine Funken über, selbst wenn die beiden Apparate mehrere Meter weit von einander entfernt waren. Wenn zwischen dem Erreger und dem Resonator eine Platte aus einer isolierenden Substanz z. B. aus Ebonit oder trockenem Holz gestellt wurde, so blieb die Erscheinung dieselbe, aber nicht mehr, wenn eine Metallplatte oder allgemein eine Platte aus elektrisch leitendem Material sich dazwischen befand. Man gewinnt so eine erste Bestätigung der von der Maxwell'schen Theorie vorausgesehenen Thatsache, dass die elektromagnetischen Schwingungen sich durch das Dielektrikum, al

[illegible]

[illegible] Versuch, welcher [illegible] Erscheinungen veranlasst. Trifft [illegible] Fortpflanzungsrichtung senkrechte [illegible] reflektierten Wellen mit den an- [illegible] Wellen mit festen Punkten (sogenannten *Bäuchen*), an welchen die Schwingungen sich addieren und dadurch die maximale Intensität erhalten wird, und anderen festen Punkten (sogenannten *Knoten*), an welchen die Schwingungen entgegengesetzt sind und man eine minimale Intensität erhält. Auf der reflektierenden Wandung hat man einen Knotenpunkt, diesem folgt nach rückwärts ein Bauch, dann ein Knoten und so weiter abwechselnd: der Abstand zwischen zwei folgenden Knoten oder Bäuchen ist gleich einer halben Wellenlänge.

Hertz konnte einen ähnlichen Versuch anstellen, indem er eine [illegible] Funkplatte gegenüber dem vertikal angeordneten Erreger aufstellte: [illegible] dem Resonator untersuchte er dann den Raum zwischen dem Er- [illegible] der Platte und nahm die Existenz von Knoten und Bäuchen [illegible] nicht anders als durch die Interferenz der reflek- [illegible] Wellen erklären lässt, so schliesst man [illegible] thatsächlich in Wellenform [illegible] zwischen zwei Knoten [illegible] da [illegible] Wert der [illegible] welche [illegible] der-

Diese Ergebnisse wurden von allen späteren Forschern, welche die Versuchsbedingungen noch verbesserten, bestätigt.

Die elektrischen Schwingungen pflanzen sich also genau in derselben Weise wie die Lichtstrahlen fort; deshalb nannte sie Hertz *Strahlen elektrischer Kraft.*

Der eben erwähnte Versuch bewies uns, dass die Metalle die elektrischen Strahlen reflektieren. Es folgt daraus, dass es sich durch Anwendung von hohl gewölbten Spiegeln erreichen lässt, dass die elektrischen Strahlen sich in einer bestimmten Richtung fortpflanzen, wodurch ihre sonst mit der Entfernung vom Strahlungsmittelpunkt rasch zunehmende Abschwächung erheblich vermindert werden kann.

Bei den Hertz'schen Versuchen waren die beiden Stäbe a und b des Erregers in der Brennlinie O eines zylindrischen Spiegels mit parabolischer Direktrix angeordnet, welcher aus einer von einem passenden Holzrahmen gehaltenen Zinkplatte gebildet war.

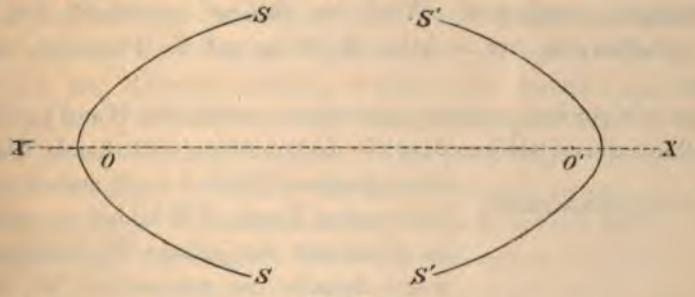


Fig. 156.

In der Brennlinie O' eines identischen Spiegels befanden sich die beiden Stäbe des Resonators; die Spiegel wurden mit den Brennlinien parallel einander gegenüber gestellt. Damit der Experimentierende frei arbeiten konnte, ohne sich zwischen die Spiegel stellen zu müssen, wurden die Spule des Induktionsapparates und die Entladungskügelchen des Resonators in den Raum ausserhalb beider Spiegel gebracht. Die Fig. 157, welche einen Schnitt des Spiegels S' mit der Brennebene darstellt, zeigt diese Anordnung. Wenn die Gesetze für die elektrischen Schwingungen dieselben wie für die Lichtstrahlen sind, so werden die von dem Erreger erzeugten Strahlen durch den Spiegel SS parallel zur Ebene XX der Brennlinien reflektiert werden und nach der Reflexion durch den Spiegel $S'S''$ nach der Brennlinie, in welcher sich der Resonator befindet, konvergieren.

Fig. 157.

ch eine derartige Anordnung vermochte Hertz das Vorhandensein
her Strahlen in einer Entfernung von 15 bis 20 m. und sogar
Mauerwände hindurch wahrzunehmen.
ie Verwendung von Hohlspiegeln von der Gestalt parabolischer
er, welche im Raume Bündel von elektrischen Strahlen in einer
mten Richtung erzeugen, gestattet für die Hertz'schen Schwingungen
Wiedergabe vieler der Versuche, welche für die Lichtstrahlen seit langer
bekannt sind.

Wir können vor allem kontrolieren, dass die Ausbreitung der elek-
chen Strahlen eine geradlinige ist. In der That, wenn man die
iegel so, wie vorhin erwähnt, stellt und einen metallischen Schirm in
n Raum $SS'SS'$ (Fig. 156) zwischen die Spiegel schiebt, so schwächen
ich die Funken am Resonator nach und nach ab und hören vollständig
uf, wenn der Schirm den grössten Teil dieses Raumes einnimmt, d. h.
wenn er den Durchgang der parallelen geradlinigen Strahlen zwischen den
beiden Spiegeln verhindert. Wird der Schirm ausserhalb des Raumes
$SS'SS'$ gehalten, so übt er keine Wirkung auf die Fünkchen am Reso-
nator aus.

Wenn wir vor eine vertikal angeordnete metallische Wand yy (Fig. 158)
den Oscillator derart stellen, dass die dessen Achse enthaltende Ebene XX
einen gewissen Winkel i mit der zu der Wand
senkrechten Ebene NX bildet, so werden wi
im Resonator die grösste Wirkung erreichen
wenn derselbe so angeordnet ist, dass di
dessen Achse enthaltende Ebene XX' die Verti
kale X enthält und mit der Ebene XN de
Winkel $r = i$ bildet.

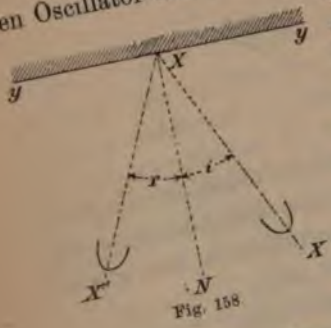


Fig. 158

Dies bestätigt im Weiteren die Ergebnisse
der vorher erwähnten Versuche bezüglich der
Reflexion der elektrischen Strahlen.

Hertz stellte ferner Versuche an über die Brechung der elektrischen
Strahlen und beobachtete, dass ein zwischen die Spiegel gestelltes Prisma
aus sogenanntem Hartpech mit einem brechenden Winkel von nahezu 30°
das Auftreten der Funken am Resonator beeinträchtigte; die Funken
leuchteten wieder auf, als er den Resonator derart verschob, dass dessen
Ebene einen bestimmten Winkel mit der Ebene des Erregers bildete.
Hertz vermochte auf diese Weise nicht nur die Brechung der elektrischen
Strahlen zu konstatieren, sondern auch durch Messung des Ablenkungs-
winkels den Brechungsexponenten des benutzten Materials für diese Strahle
zu bestimmen.

Wir haben schon bemerkt, dass die Richtung der elektrischen Kr

bei den von dem Hertz'schen Erreger erzeugten Schwingungen stets parallel zur Richtung der Stäbchen des Erregers ist, d. h. dass die Schwingungen nur in einer bestimmten Richtung stattfinden, wie es bei dem polarisierten Lichte der Fall ist. Man wird also mit den Apparaten von Hertz ähnliche Versuche anstellen können, wie in der Optik über die Polarisation.

Es seien die Spiegel mit parallelen Brennlinien wie vorhin vertikal aufgestellt, und es werde zwischen dieselben ein Holzrahmen eingeschoben, welcher mit einander parallelen und gleich weit von einander entfernten Kupferdrähten bespannen ist.

Ist der Rahmen derart angeordnet, dass die Richtung der Drähte die Richtung der Schwingungen, d. h. die Richtung der Brennlinien der Spiegel senkrecht kreuzt, so merkt man keine Schwächung der sekundären Funken. Dreht man aber den Rahmen um 90°, sodass die Drähte parallel zur Schwingungsrichtung sind, so verschwinden die Funken am Resonator vollständig; bei einer dazwischen liegenden Stellung des Rahmens werden die Funken geschwächt. Je nach der Lage, in welcher sich der Rahmen befindet, verhält sich derselbe also wie eine durchlässige, wenig durchlässige oder undurchlässige Platte. Wir können uns leicht diesen Umstand erklären. Die elektrischen Kräfte erzeugen in den zu denselben parallelen Drähten Ströme, welche die Energie der Schwingungen in Wärme umwandeln, letztere können sich somit nicht weiter fortpflanzen; sind dagegen die Drähte normal zu den Schwingungen, so sind die induzierten Ströme gering oder sie verschwinden vollkommen, und folglich pflanzen sich die Schwingungen grösstenteils weiter fort; wenn endlich die Drähte gegen die Schwingungsrichtung geneigt sind, so können wir die Schwingungen in zwei Komponenten zerlegt denken, von denen die eine, parallel zu den Drähten, erlischt, und die andere, senkrecht zu denselben, sich weiter durch den Rahmen hindurch fortpflanzt. Das Verhalten des Rahmens ist demjenigen der parallel zur Krystallisationsachse geschnittenen Turmalinplatten analog, welche die in einer bestimmten Richtung polarisierten Strahlen absorbieren, aber für die in der dazu senkrechten Richtung polarisierten Strahlen durchlässig sind. Wird eine Turmalinplatte zwischen die beiden Nicholson'schen Prismen, den Polarisator und den Analysator, eingeschoben, welche mit ihren Hauptschnitten zusammenfallend angeordnet sind, derart, dass durch dieselben Licht hindurchgeht, so wird man Licht, Dunkelheit oder geschwächtes Licht haben, je nachdem die Turmalinkrystallachse parallel, normal oder geneigt zu dem Hauptschnitte der Prismen ist.

Kreuzt man die beiden parabolischen Spiegel, sodass ihre Achsenebenen senkrecht zu einander stehen, so erhält man am Resonator keine

Funken; schiebt man aber den Drahtschirm zwischen beide Apparate, so werden keine Funken auftreten, so lange die Richtung der Drähte parallel zu derjenigen des Erregers oder des Resonators ist, während die Funken wieder hervorgerufen werden, wenn der Rahmen gedreht wird. Man hat die grösste Wirkung, wenn die parallelen Drähte des Rahmens gegen die Richtung des Erregers und Resonators um 45° geneigt sind.

Auch diese Versuche können wir leicht mit der Theorie in Einklang bringen. Bei den gekreuzten Spiegeln sind die Schwingungen senkrecht zur Richtung des Resonators und können nicht auf diesen einwirken, während die vom Erreger ausgehenden Strahlen, wenn der Rahmen sich dazwischen in geneigter Lage befindet, von diesem in zwei Komponenten zerlegt werden, die eine parallel, die andere normal zur Drahtrichtung. Die erste wird absorbiert, die zweite pflanzt sich fort, geneigt gegen die Richtung des Resonators, und kann eine zu dieser parallele Komponente haben, die auf den sekundären Leiter zu wirken vermag. Die Wirkung ist natürlich ein Maximum, wenn das Drahtgitter unter 45° gegen die beiden Brennlinien geneigt ist.

Diese Erscheinung ist vollkommen analog derjenigen, die man bei zwei gekreuzten Nicholson'schen Prismen beobachten kann; durch diese geht kein Licht hindurch; wird aber dazwischen eine Turmalinplatte eingeschoben, so bleibt das Feld dunkel, wenn die Turmalinkrystallachse parallel zu dem Hauptschnitte eines der Prismen ist; dreht man die Platte, so wird das Feld aufgehellt, und man wird die grösste Lichtintensität haben, wenn die Turmalinkrystallachse unter 45° gegen die Hauptschnitte der beiden Prismen geneigt ist.

Ohne auf das Studium der Arbeiten von Hertz und anderer noch weiter einzugehen, können wir schon die erwähnten Thatsachen als genügend ansehen zur Bestätigung dafür, dass die Maxwell'sche Theorie eine wirkliche experimentelle Grundlage besitzt.

Die elektromagnetischen und die Licht-Schwingungen breiten sich beide durch ein den ganzen Raum ausfüllendes Medium aus, und die Gesetze, nach welchen diese Ausbreitung in beiden Fällen stattfindet, sind vollkommen gleichartig. Es liegt also nicht nur die Annahme nahe, dass das Medium, in welchem sich die beiden Klassen von Schwingungen fortpflanzen, dasselbe sei, sondern auch, dass zwischen denselben kein wesentlicher (also kein qualitativer, sondern nur ein quantitativer) Unterschied bestehe. Licht und elektromagnetische Schwingungen sind als eine gleichartige Erscheinung zu betrachten; der Unterschied liegt nur in den Parametern der Gleichungen, welche die Gesetze der Erscheinung ausdrücken, nämlich hauptsächlich in der Frequenz und in der Amplitude der Schwingungen. In Folge dieses Unterschiedes sind die Wirkungen

und der Charakter beider Erscheinungen verschieden; und es bedarf verschiedener Mittel, um sie nachweisen und beobachten zu können, obwohl sie vom physikalischen Standpunkte aus als gleichartig erscheinen.

---

§ 3.

Energiewanderung in einem elektromagnetischen Felde.

140. Gleichung und Hypothese von Poynting. — Die Maxwell'schen Gleichungen und die Hertz'schen Versuche haben uns gezeigt, wie sich die elektromagnetischen Schwingungen durch den Raum fortpflanzen. Prof. J. H. Poynting untersuchte, von den Maxwell'schen Gleichungen ausgehend, in einer im Jahre 1884 herausgegebenen Abhandlung, wie und nach welchen Gesetzen die elektromagnetische Energie sich ausbreitet. Nach den Versuchen von Hertz, welche die Maxwell'sche Theorie vollständig bestätigen, gewannen die Poynting'schen Ableitungen eine sehr grosse Bedeutung.

Wir werden auch zu den Ergebnissen Poynting's gelangen können, wenn wir von den Maxwell'schen Gleichungen in der einfacheren Form ausgehen, die wir ihnen oben gegeben haben.

Wir wollen zunächst die Energiemenge berechnen, welche in der Zeiteinheit in den Raum eintritt, der von einer in dem elektromagnetischen Felde beliebig gewählten geschlossenen Fläche begrenzt ist. Diese Energiemenge ist gleich der Zunahme der in diesem Raume vorhandenen elektrischen und magnetischen Energie, vermehrt um die in demselben Raume unter der Form von Wärme vergeudete Energie.

Wenn F und $\mathfrak{H}$ die elektrische bezw. die magnetische Kraft in einem Punkte und X, Y, Z bezw. L, M, N ihre Komponenten nach den Koordinatenachsen sind, so ist der Wert der elektrischen Energie in der Volumeneinheit [45] $\frac{\varepsilon}{8\pi}F^2$, und der Wert der magnetischen Energie [90] $\frac{\mu}{8\pi}\mathfrak{H}^2$, und mithin ist die gesamte elektromagnetische Energie:

$$w = \frac{\varepsilon}{8\pi}F^2 + \frac{\mu}{8\pi}\mathfrak{H}^2$$

oder:

$$w = \frac{\varepsilon}{8\pi}(X^2 + Y^2 + Z^2) + \frac{\mu}{8\pi}(L^2 + M^2 + N^2).$$

Ihre Änderung in der Zeiteinheit ist durch den Differentialquotienten:

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{1}{4\pi}\left[\varepsilon\left(X\frac{\partial X}{\partial t} + Y\frac{\partial Y}{\partial t} + Z\frac{\partial Z}{\partial t}\right) + \mu\left(L\frac{\partial L}{\partial t} + M\frac{\partial M}{\partial t} + N\frac{\partial N}{\partial t}\right)\right]$$

[illegible] Energiezuwachs in der Zeit- und Volumeneinheit [illegible]

[illegible] Widerstand des Mediums und u_x, u_y und u_z [illegible] nach den Koordinatenachsen in dem [illegible] so ist die in der Volumeneinheit und in [illegible] Wärme vergeudete Energiemenge:

$$[illegible] = \rho\, u_x^2 + u_y^2 + u_z^2.$$

[illegible] ist, wie wir gesehen haben [134]:

$$[illegible] = [illegible] X, \quad \text{und daher: } \rho u_x^2 = r u_x X;$$

[illegible] man:

$$[illegible] = r u_y Y, \qquad \rho u_z^2 = r u_z Z;$$

[illegible] Werte erhält man:

$$[illegible] = [illegible] X + u_y Y + u_z Z.$$

[illegible] man gelangen, wenn man beachtet, [illegible] Energie die Arbeitsmengen darstellt, die [illegible] X, Y, Z, deren Werte in elektromagne- [illegible] auf die Ströme u_x, u_y und u_z [illegible]

[illegible] das Volumen *Eins* eintretende [illegible]

$$[illegible] + u\left(L\frac{L}{[illegible]} + [illegible]\right) + 4\pi r\,(u_x X + \cdots)\Big];$$

[illegible] eintretende Energiemenge ist:

$$[illegible] + [illegible]\, dx\, dy\, dz.$$

[illegible] Fläche S begrenzte Volumen eintretende Energie-

$$[illegible] + [illegible]\, dx\, dy\, dz$$

[illegible] der Maxwell'schen Gleichungen [illegible] Flächenintegral, welches sich zu einer [illegible] eignet

[illegible] Maxwell'schen Gleichungen [134]:

$$[illegible] + 4\pi [illegible] = \frac{N}{[illegible]} - \frac{M}{[illegible]}$$

$$[illegible] + 4\pi [illegible] = \frac{L}{[illegible]} - \frac{N}{[illegible]}$$

$$[illegible] + 4\pi [illegible] = \frac{M}{[illegible]} - \frac{L}{[illegible]}$$

$$(2)\qquad \begin{cases} \frac{\mu}{v}\frac{\partial L}{\partial t} = \frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y} \\ \frac{\mu}{v}\frac{\partial M}{\partial t} = \frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial z} \\ \frac{\mu}{v}\frac{\partial N}{\partial t} = \frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x} \end{cases}$$

bezw. mit X, Y, Z und L, M, N, und man summiere dieselben. Die linke Seite der sich ergebenden Gleichung lautet:

$$\frac{\varepsilon}{v}\left(X\frac{\partial X}{\partial t}+\cdots\right)+\frac{\mu}{v}\left(L\frac{\partial L}{\partial t}+\cdots\right)+4\pi\left(u_x X+\cdots\right),$$

und unter Berücksichtigung der Gleichung (α):

$$\frac{4\pi}{v}\left(\frac{\partial w}{\partial t}+q\right).$$

Auf der rechten Seite ergeben die Posten, welche die Differentialquotienten nach x enthalten:

$$Z\frac{\partial M}{\partial x}+M\frac{\partial Z}{\partial x}-\left(Y\frac{\partial N}{\partial x}+N\frac{\partial Y}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(ZM-YN\right).$$

Analog reduzieren sich die die Differentialquotienten nach y und nach z enthaltenden Posten auf:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(XN-ZL\right),\qquad \frac{\partial}{\partial z}\left(YL-XM\right).$$

Man erhält also:

$$\frac{4\pi}{v}\left(\frac{\partial w}{\partial t}+q\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(ZM-YN\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(XN-ZL\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(YL-XM\right).$$

Durch Einführung des aus der obigen Formel ermittelten Wertes von $\frac{\partial w}{\partial t}+q$ in die Formel (β) erhält man:

$$W=\frac{v}{4\pi}\iiint\left[\frac{\partial}{\partial x}(ZM-YN)+\frac{\partial}{\partial y}(XN-ZL)+\frac{\partial}{\partial z}(YL-XM)\right]dxdydz,$$

und nach einer ersten Integration nach x für den ersten Posten, nach y für den zweiten und nach z für den dritten:

$$(\gamma)\qquad W=\frac{v}{4\pi}\left[\iint(ZM-YN)dydz+\iint(XN-ZL)dzdx+\iint(YL-XM)dxdy\right].$$

In dieser Formel sind die Binome innerhalb der Klammern Funktionen von nur zwei Veränderlichen und beziehen sich auf die Punkte der Fläche S; die Integrale sind als auf die ganze Fläche ausgedehnt zu verstehen.

Bezeichnet n die nach au[ß]en gerichtete Normale des Elem[ents] der Fläche, ferner (nx), (ny) und (nz) die Winkel, die diese Nor[male] den Koordinatenachsen bildet, so ist:

$$dydz = dS\cos(nx),$$
$$dzdx = dS\cos(ny),$$
$$dxdy = dS\cos(nz).$$

Durch Einsetzung in die Formel (γ) und Fortlassung des F[aktors] (was so viel heisst, als dass die Komponenten X, Y, Z und fo[lglich] in elektromagnetischen Einheiten ausgedrückt vorauszusetzen [ist]) giebt sich:

$$W = \frac{1}{4\pi}\int[(ZM - YN)\cos(nx) + (XN - ZL)\cos(ny) + (YL - XM)\cos$$

Denken wir uns Strecken, welche die elektrische Kraft F [und] magnetische Kraft $\mathfrak{H}$ darstellen, auf die Ebene yz projiziert; [die] jektionen seien bezw. mit f und h bezeichnet (Fig. 159), und es

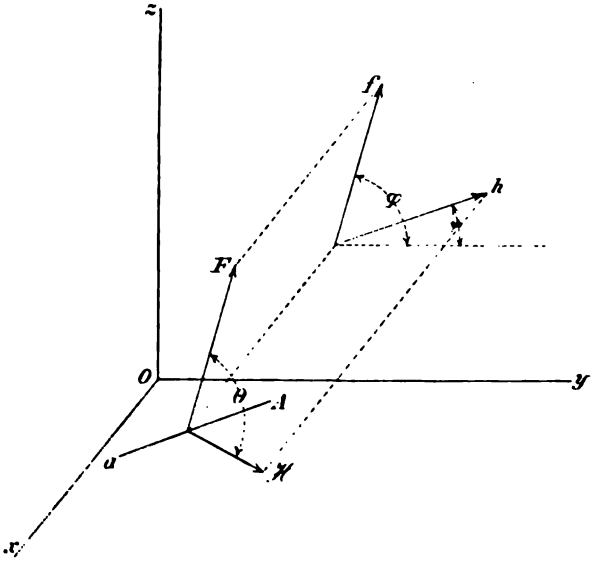


Fig. 159.

und ε die Winkel, die diese Projektionen mit der Achse Oy bild[en]. Projektionen von f und h auf die Achsen Oy und Oz sind offenb[ar] den Strecken Y, Z, M, N, folglich ist:

$$Y = f \cos \varphi$$
$$Z = f \sin \varphi$$
$$M = h \cos \psi$$
$$N = h \sin \psi,$$

ich ergiebt:

$$' - YN = fh (\sin \varphi \cos \psi - \cos \varphi \sin \psi) = fh \sin (\varphi - \psi).$$

ganz analoger Weise lassen sich die zwei anderen Binome aus-

ist $fh \sin (\varphi - \psi)$ der Flächeninhalt des Parallelogramms mit n f und h, d. h. der Flächeninhalt der Projektion auf die Ebene arallelogramms, welches als Seiten die magnetische Kraft $\mathfrak{H}$ und rische Kraft F in dem betrachteten Punkte besitzt. Ebenso er- e anderen Binome die Projektionen desselben Parallelogramms auf ren Koordinatenebenen. Bezeichnet A einen nach der Normalen e $F\mathfrak{H}$ gerichteten Vektor mit einem Tensor gleich dem Flächen- $F\mathfrak{H} \sin 0$ des Parallelogramms mit den Seiten F und $\mathfrak{H}$, wobei n den Kräften F und $\mathfrak{H}$ gebildeten Winkel bedeutet, so stellen Binome die Projektionen A_x, A_y und A_z dieses Vektors auf die tenachsen dar.

st zu beachten, dass $fh \sin (\varphi - \psi)$ positiv ist, wenn $\varphi > \psi$ ist, n die Drehung, durch welche f auf dem kürzesten Wege mit h nfällt, für einen in die Richtung Ox blickenden Beschauer in r Richtung des Uhrzeigers entgegengesetzten Sinne stattfindet. gilt für die beiden anderen Projektionen.

folgt daraus, dass dieser Vektor, unter Annahme, dass als die Richtungen der Projektionen desselben diejenigen gelten sollen, nit den positiven Richtungen der Koordinatenachse zusammen- nkrecht zur Ebene $F\mathfrak{H}$ in der Richtung a anzubringen ist, d. h. ichtung, in welche man blicken muss, um die Drehung, durch ' in $\mathfrak{H}$ übergeführt wird, entgegengesetzt der Richtung des Uhr- tattfinden zu sehen.

Projektionen A_x, A_y und A_z werden dagegen die in den Klammern en Binome mit entgegengesetztem Vorzeichen darstellen, wenn Vektor A entgegengerichtet annehmen. Wir können die Richtung urch eine der folgenden Regeln bestimmen:

Richtung des Vektors A ist:

iejenige, für welche das System A, F, $\mathfrak{H}$ sich als rechtsgängig

2. diejenige der Vorwärtsbewegung des Maxwell'schen Korkziehers, wenn derselbe in der Richtung von der elektrischen zur magnetischen Kraft herumgedreht wird.

3. diejenige des Mittelfingers der rechten Hand, wenn der Daumen und der Zeigefinger nach F bezw. $\mathfrak{H}$ gerichtet sind und ersterer senkrecht zur Ebene der beiden anderen steht.

4. diejenige, in welche man blicken muss, damit die Drehung, durch welche F auf dem kürzesten Wege in $\mathfrak{H}$ übergeführt werden kann, im Sinne des Uhrzeigers stattfindet.

Nach diesen Vereinbarungen ist:

$$W = -\frac{1}{4\pi}\int[A_x \cos(nx) + A_y \cos(ny) + A_z \cos(nz)]dS.$$

Der Posten unter dem Integralzeichen stellt uns die Projektion des Vektors A auf die nach aussen gerichtete Normale der Fläche in dem betrachteten Punkte dar und giebt uns unter Berücksichtigung des negativen Vorzeichens die Projektion auf die nach innen gekehrte Normale. Bezeichnet man mit A_{ni} diese Projektion, so ist zum Schlusse:

$$W = \frac{1}{4\pi}\int A_{ni}dS. \tag{8}$$

Die Energiemenge, welche in der Zeiteinheit in den von einer beliebigen geschlossenen Fläche begrenzten Raum eintritt, ist, abgesehen vom Faktor $\frac{1}{4\pi}$, *durch den in den Raum eintretenden Fluss des Vektors A gegeben, dessen Tensor der Wert* $F\mathfrak{H}\sin\theta$, *d. h. der Flächeninhalt des Parallelogramms mit den Seiten F und* $\mathfrak{H}$ *ist, und dessen Richtung senkrecht zur Ebene* $F\mathfrak{H}$ *ist und mit den Richtungen F und* $\mathfrak{H}$ *ein rechtsgängiges System bildet.*

Dieser Satz ist eine strenge Folgerung der Maxwell'schen Gleichungen; er lässt aber noch nicht vollständig erkennen, wie sich die Energie bewegt, weil er nichts darüber angiebt, welche Energiemenge durch ein Flächenelement oder durch die Flächeneinheit hindurchgeht. Wir bemerken jedoch, dass die einfachste der möglichen Deutungen der Gleichung (8) in der Annahme besteht, dass die das Element dS durchsetzende Energiemenge durch das Differential $A_{ni}dS$ selbst gegeben wird, dessen Integral den Betrag angiebt, um welchen der Energievorrat innerhalb der geschlossenen Fläche S zugenommen hat.

Poynting wurde durch die natürlichste Deutung seiner Formel auf die folgende Hypothese geführt:

Die Energie wandert immer in einer Richtung durch das elektromagnetische Feld, welche sowohl zur Richtung der magnetischen wie der elektrischen Kraft senkrecht steht; durch jede Flächeneinheit einer zur Wanderungsrichtung senkrecht gelegten Ebene geht in einer Sekunde eine Energiemenge hindurch, gleich dem Flächeninhalte des Parallelogramms, welches als Seiten die elektrische und die magnetische Kraft besitzt, dividiert durch 4π.

Der Sinn der Wanderung ist der oben bestimmte Sinn des Vektors A.

Unter der Annahme dieser Poynting'schen Hypothese hängt der Wert der übertragenen Energie bei gegebenen Werten der magnetischen und der elektrischen Kraft von dem Werte des Winkels θ, den die Richtungen beider Kräfte bilden, ab. Es findet keine Übertragung von Energie statt, wenn die Kräfte die gleiche oder die entgegengesetzte Richtung besitzen, d. h. wenn $\theta = 0^0$ oder $= 180^0$ ist; die Übertragung ist dagegen ein Maximum, wenn die Kräfte senkrecht zu einander stehen, und findet in dem einen oder in dem entgegengesetzten Sinne statt, je nachdem $= 90^0$ oder $= 270^0$ ist.

141. Besonderer Fall eines geradlinigen Stromes. Teilnahme des Elektrikums und des Leiters an der Übertragung. — Wenden wir diese Hypothese auf einen einfachen Fall an. Ein zylindrischer Leiter (Fig. 160) sei von unten nach oben von einem konstanten Strome durchflossen, dessen Intensität in elektromagnetischen Einheiten den Wert i besitzt. Fassen wir einen Teil des Leiters mit der Länge l und dem Widerstande r, an dessen Enden das Potential die konstanten Werte V_1 und V_2 besitzt, ins Auge, und bezeichnen wir mit $2a$ den Durchmesser des Leiters.

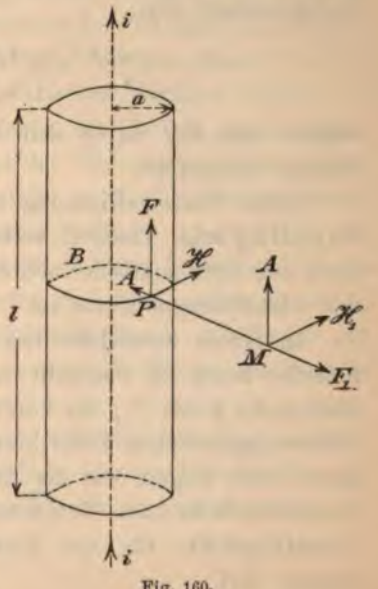


Fig. 160.

Um zu sehen, wie die Energie in diesem Falle wandert, betrachten wir zuerst einen innerhalb des Leiters und unendlich nahe an dessen Oberfläche gelegenen Punkt P; da die Stromstärke konstant und auf den Leiterquerschnitt gleichmässig verteilt ist, so ist die elektrische Kraft F im

Punkte P parallel zur Achse des Zylinders gerichtet, und zwar in dem Sinne, in welchem die Potentiale abnehmen: die magnetische Kraft ist in P wie die an den Schnitt AB gelegte Tangente und, laut der Maxwell'schen Regel, nach $P\mathscr{H}$ gerichtet. Die Wanderung der Energie findet also senkrecht zur Ebene $FP\mathscr{H}$ in der Richtung PA statt, in welcher der Maxwell'sche Korkzieher fortschreitet, wenn er von F nach $\mathscr{H}$ rotiert, nämlich in bezug auf den Zylinder von aussen nach innen. Dasselbe gilt für jeden Punkt des Leiters: es folgt hieraus, dass die Energie sich nicht längs des Leiters bewegt, sondern dass sie von aussen nach dem Inneren desselben fliesst.

Die Energiemenge, die in der Zeiteinheit durch die Flächeneinheit des Leiters hindurchgeht, ist gleich:

$$\frac{1}{4\pi} F\mathscr{H} \sin\theta,$$

und wird in unserem Falle, da:

$$\theta = (\mathfrak{n}\mathfrak{F}), \qquad \sin\theta = 1$$
$$F = \frac{V_1 - V_2}{l}, \qquad \mathscr{H} = \frac{2i}{a}$$

ist, durch:

$$\frac{1}{4\pi} \frac{V_1 - V_2}{l} \frac{2i}{a}$$

ausgedrückt.

Durch die ganze betrachtete Fläche $2\pi a l$ tritt in den Leiter die Energiemenge ein:

$$\frac{2\pi a l}{4\pi} \frac{V_1 - V_2}{l} \frac{2i}{a} = (V_1 - V_2) i = ri^2,$$

welche eben der durch den Joule'schen Effekt in Wärme umgesetzten Energie entspricht.

Diese Übereinstimmung musste notwendigerweise eintreten, weil die Poynting'sche Theorie, selbst wenn sie physikalisch nur eine Hypothese ist, mathematisch doch eine berechtigte Folgerung aus den Prinzipien des Elektromagnetismus ist.

In einem ausserhalb des Leiters gelegenen Punkte M ist die magnetische Kraft $\mathscr{H}$ ebenfalls senkrecht zu dem Halbmesser gerichtet; die elektrische Kraft F_1, die von dem vom Strome im Dielektrikum erzeugten elektromagnetischen Felde herrührt, kann, mindestens für Punkte, die dem Leiter nahe liegen, wie der Radius gerichtet angenommen werden, da die Leiteroberfläche als Äquipotentialfläche angesehen werden kann, weil das Potentialgefälle für ein verschwindend kleines Leiterstück vernachlässigt werden darf.

Es folgt daraus, dass der Vektor A, längs dessen die Energie wandert, parallel zu der Achse des Leiters ist und die Richtung von i besitzt.

Thatsächlich ist der Vektor A etwas gegen die Leiteroberfläche geneigt, weil diese keine wirkliche Niveaufläche ist. Die Energie pflanzt sich im Dielektrikum um den Leiter herum fort, hauptsächlich parallel zu demselben, und dringt zu einem geringen Teile in den Leiter ein, in welchem sie unter der Form von Wärme vergeudet wird. Wenn der Leiter keinen Widerstand besässe, so würde der in ihm auftretende Potentialabfall gleich Null sein, d. h. die Leiteroberfläche wäre wirklich eine Niveaufläche, der Vektor A würde keine zur Oberfläche senkrechte Komponente haben, keine Energievergeudung würde durch den Joule'schen Effekt stattfinden, und die Energie würde sich gänzlich parallel zur Leiterachse fortpflanzen. Die Übertragung der Energie findet also im Dielektrikum und nicht im Innern des Leiters statt; letzterer bildet nur sozusagen die Achse der Erscheinung, bestimmt die Fortpflanzungsrichtung und wirkt gewissermassen wie ein Geleise.

In dem praktischen Falle, in welchem der Widerstand des Leiters nicht gleich Null ist, bedingt letzterer die Vergeudung eines Teiles der Energie; der Leiter kann auch in dieser Hinsicht mit einem Geleise verglichen werden, in welchem ein Teil der Energie durch die Reibung in Wärme umgesetzt wird.

Die Poynting'sche Auffassung erklärt noch besser die Anschauung, dass die leitenden Körper bezüglich der elektrischen Kräfte rein negative Eigenschaften besitzen. Wie in den elektrostatischen Feldern die Energie in den dielektrischen und nicht in den leitenden Körpern ihren Sitz hat, so wandert die Energie im Falle des elektrischen Stromes durch das Dielektrikum und nicht durch den Leiter fort. Das Metall, aus welchem der Draht besteht, spielt bei dem Vorgange der Übertragung elektrischer Energie nicht die Rolle eines aktiven Materials; es spielt vielmehr hierbei eine passive Rolle. Mitten in dem umgebenden Medium, wo eigentlich die Kräfte ihren Sitz haben und sich fortpflanzen, hat der Leiterdraht keine andere Funktion, als eine Linie der Schwäche zu bilden, welche bewirkt, dass die Energiewanderung in einer bestimmten Richtung stattfindet; der Draht ist nicht der Sitz der Erscheinung, sondern bestimmt nur für die Erscheinung die Richtung der Fortpflanzung.

Der Leiter stellt nicht einen Kanal, in welchem die Energie fortwandert, sondern einen Raum dar, nach welchem hin ein Teil der Energie konvergiert, und in welchem dieser Teil in Wärme umgesetzt wird.

142. Tragweite der Poynting'schen Theorie. — Wir haben gesehen, dass die Gleichung (8) der Poynting'schen Formeln, welche den Energievorrat angiebt, der in der Zeiteinheit in eine beliebige geschlossene Fläche S eintritt, eine streng folgerichtige Ableitung aus den Maxwell'schen Gleichungen ist; sie muss daher selbst als richtig angenommen werden, und dies um so mehr, nachdem die Hertz'schen Versuche den Maxwell'schen Gleichungen eine experimentelle Grundlage gegeben haben.

Poynting deutet, wie gesagt, diese Gleichung in der natürlichsten Weise, indem er annimmt, dass die Energie in der Richtung des Vektors A derart wandert, dass in der Zeiteinheit durch jede zum Vektor A senkrecht gelegene Fläche eine Energiemenge, deren Wert

$$\frac{1}{4\pi} F \mathfrak{A} \sin\theta$$

beträgt, hindurchgeht.

Man hat jedoch wohl zu beachten, dass dies lediglich eine Hypothese ist; beliebig viele andere Hypothesen über die Fortpflanzungsart der Energie können ebenso gut in Übereinstimmung mit der Gleichung (8) gebracht werden.

In der That, denken wir uns ausser dem schon definierten Vektor A noch einen Vektor A' mit solenoidischer Verteilung, welcher dieselben Dimensionen (MT^{-2}) wie A besitzt, dessen Fluss also eine Energiemenge bezogen auf die Zeiteinheit darstellt, so ist der in die geschlossene Fläche S eintretende Fluss des Vektors A' der Solenoidität wegen gleich Null, und folglich genügt auch der Vektor $A + A'$ der Gleichung von Poynting; man wird sich also auch eine Wanderung der Energie vorstellen können, welche in der Richtung des aus den zwei Vektoren A und A' resultierenden Vektors derart stattfindet, dass in der Zeiteinheit durch die senkrecht zu der Richtung des Vektors gelegene Flächeneinheit eine Energiemenge, dem Werte nach gleich dem Tensor dieses Vektors selbst, hindurchgeht.

Da man sich unendlich viele solche Vektoren wie A' denken kann, so kann sich die Energie auf beliebig viele Weisen, welche sämtlich der Poynting'schen Gleichung Genüge leisten, fortpflanzen.

Es ist also daran festzuhalten, dass die Deutung, die Poynting seiner Gleichung verlieh, obwohl die einfachste und die natürlichste, doch immer noch eine Hypothese ist, und dass beliebig viele andere, ebenso annehmbare Hypothesen aufgestellt werden können.

Diese Betrachtungen waren notwendig, um den Wert der Folgerungen, die aus der Poynting'schen Hypothese abgeleitet werden können, und von denen einige manchmal befremdend und mit den experimentellen Ergebnissen nicht in Übereinstimmung befindlich erscheinen, zu verstehen.

Nach der Poynting'schen Hypothese findet immer eine Energiewanderung statt, wenn der Vektor A nicht gleich Null ist, d. h. wenn die Kräfte F und $\mathfrak{H}$ von Null verschieden sind, und einen Winkel θ bilden, dessen Wert weder 0^0 noch 180^0 ist. Es ist nun leicht, sich Felder vorzustellen, welche ihre Existenz ruhenden elektrischen und magnetischen Massen verdanken, und in welchen der Vektor A nicht gleich Null ist.

Betrachten wir beispielsweise (Fig. 161) eine in einem Punkte E liegende elektrische und eine in einem Punkte M liegende magnetische Masse.

In allen in endlicher Entfernung befindlichen Punkten P, welche nicht auf der die Punkte E und M verbindenden Geraden liegen, besitzen die Kräfte F und $\mathfrak{H}$ Werte, die von Null verschieden sind, und ihre Richtungen bilden Winkel, die weder 0^0 noch 180^0 sind; der Vektor A besitzt einen bestimmten Wert und ist senkrecht zur Ebene PEM gerichtet, in bezug auf die Figurebene von hinten nach vorn in den Punkten, welche wie P links von EM liegen, und von vorn nach hinten in den Punkten, die sich wie P' rechts von der Geraden EM befinden. Man würde also in diesem ausschliesslich von statischen Zuständen bedingten Felde eine kontinuierliche Energiewanderung finden, die sich auf der Bahn von Kreisen vollzieht, deren Mittelpunkte auf der Geraden selbst liegen, und deren Ebenen senkrecht zu derselben stehen.

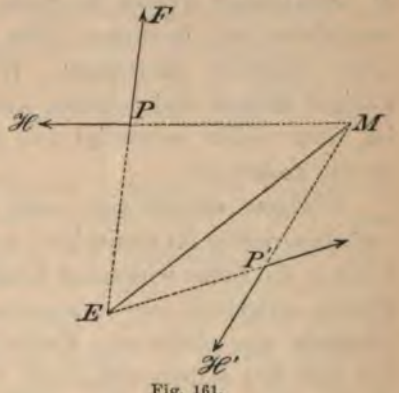


Fig. 161.

Eigentlich wäre eine solche Art von Energieübertragung nicht unmöglich; die Thatsache, dass die Energie sich nicht zeigt, kann durch die solenoidische Eigenschaft der Vektorverteilung, nach welcher keine Anhäufung von Energie an einer Stelle möglich ist, erklärt werden.

Die Annahme, dass thatsächlich diese Übertragung stattfinde, wäre jedoch, zumal sie sich experimentell nicht bestätigt, nicht genügend gerechtfertigt. Das betrachtete Beispiel genügt, um zu zeigen, dass man nicht behaupten kann, die Poynting'sche Hypothese entspreche immer den physikalischen Thatsachen; die von Poynting angedeutete Energiewanderung ist eine der unendlich vielen möglichen Übertragungsarten, es ist aber nicht gesagt, dass sie immer die wirkliche sei.

Aus diesen Gründen konnten sich viele Gelehrte nicht zu der Anerkennung der Poynting'schen Hypothese entschliessen. Wenn man aber

sich einerseits von derselben zu übereilten Folgerungen nicht führen lassen darf, so ist es andererseits übertrieben, mit Hertz zu meinen, dass das Prinip der Kontinuität der Energie, wie es von Poynting deutlich ausgesprochen, bei dem gegenwärtigen Stande der Wissenschaft einen genügend vorbereiteten Boden noch nicht finde.

143. **Die Energiewanderung findet thatsächlich im Dielektrikum und nicht in dem Leiter statt.** — Aus der Poynting'schen Hypothese haben wir abgeleitet, dass die Energie sich im Dielektrikum und nicht im Leiter ausbreitet; aber diese Folgerung kann auch nicht als streng bewiesen angenommen werden, weil wir einen Vektor A' mit solenoidischer Verteilung stets finden können, welcher der Bedingung genügt, dass der aus A und A' resultierende Vektor in einem vollkommen leitenden Medium von Null verschieden sei; in diesem Falle würde sich die Energie auch durch den Leiter hindurch übertragen. Wir können sagen, dass diese Hypothese weniger einfach und weniger wahrscheinlich als diejenige von Poynting ist, aber nichts berechtigt uns zu der Behauptung, dass die eine besser als die andere sei.

Übrigens ergiebt sich, auch ohne auf wissenschaftliche Abstraktionen zurückzugreifen, für denjenigen, welcher die Faraday'sche Auffassung, dass keine in die Ferne wirkenden Kräfte existieren — worauf die Maxwell'sche Theorie aufgebaut ist —, angenommen hat und mit gesundem Menschenverstande eine elektrische Kraftübertragungsanlage betrachtet, ganz natürlich und fast selbstverständlich die Thatsache, dass das Dielektrikum bei der Übertragung der elektromagnetischen Energie die Hauptrolle spielt.

Betrachten wir in der That eine solche Anlage, bestehend aus einem Generator und einem mit diesem durch eine metallische Leitung einen Stromkreis bildenden Motor. Gehen die Leitungen von Bürsten aus, welche auf den rotierenden metallischen Teilen schleifen, so ist zwischen den Ankern beider Maschinen Kontinuität des Metalles, sowie des Dielektrikums vorhanden, und folglich kann man ebenso gut die Hypothese aufstellen, dass die Energie sich im Innern der Leitungsdrähte fortpflanzt, als dass dieselbe sich ausserhalb derselben durch das Dielektrikum überträgt. Die Schwierigkeit, sich den Vorgang der Übertragung vorzustellen, ist in den beiden Hypothesen die gleiche, weil innerhalb der Drähte wie ausserhalb derselben keine Bewegung der Massen wahrzunehmen ist. Wir können aber Fälle betrachten, in welchen nur die Kontinuität des Dielektrikums, aber die des Metalles vorhanden ist, und aus welchen wir sichere Anhaltspunkte für eine Entscheidung zwischen den beiden Hypothesen gewinnen können.

Bei einer Übertragung zwischen einem Wechselstromgenerator mit

stehendem Anker und einem Wechselstrommotor derselben Type ist nur Kontinuität des Dielektrikums und nicht des Metalles vorhanden, da in diesem Falle die metallische Kontinuität nur zwischen den festen Teilen beider Maschinen bestehen kann, aber nicht zwischen diesen Teilen und den beweglichen, welche gewöhnlich aus den sternförmig angeordneten Feldmagneten bestehen und in dem Gehäuse, ohne dasselbe zu berühren, rotieren. Nun übertragen, obwohl die metallische Kontinuität fehlt, diese rotierenden Magnetkränze die Bewegung ebenso, wie es etwa zwei ineinander greifende Zahnräder thun würden. Zu der Übertragung ist also die Kontinuität des Metalles nicht nötig; die isolierenden Schichten, welche die beweglichen Teile der beiden Maschinen umgeben, verhindern die Übertragung nicht, das Dielektrikum lässt sich von der elektromagnetischen Energie durchsetzen. Dies wird noch verständlicher, wenn man anstatt einer direkten Übertragung, eine indirekte Übertragung mittels Transformatoren ins Auge fasst. Und in der That ist in diesem Falle keine metallische Kontinuität vorhanden, auch nicht zwischen den festen Teilen beider Maschinen.

Betrachten wir nun dagegen den Fall, in welchem die Kontinuität des isolierenden Mediums unterbrochen ist; denken wir uns z. B., dass das Zimmer, in welchem sich der Generator, oder dasjenige, in welchem sich der Motor befindet, oder beide mit einer dicken Metallschicht bekleidet seien, welche weder an den Wänden, noch an dem Boden und an der Decke einen isolierenden Teil unbedeckt lasse. In diesem Falle ist keine Übertragung mehr möglich; wir können jetzt absolut keine Menge von elektromagnetischer Energie von dem Zimmer, wo der Generator ist, austreten, und in das Zimmer, wo der Motor ist, eintreten lassen. Die metallische Wand lässt sich von der elektromagnetischen Energie nicht durchsetzen; diese tritt aus dem Zimmer aus oder in das Zimmer ein nur unter der Bedingung, dass sie durch eine Öffnung durchgehen kann; und diese Öffnung bleibt dem Durchgange der Energie auch dann noch offen, wenn sie nur durch eine isolierende Substanz geschlossen ist, ebenso wie die Fenster unserer Häuser dem Lichte offen sind, wenn sie nur durch Glasscheiben geschlossen sind. Die Energie kann teilweise in das Metall der Wand eintreten, wird aber daselbst in Wärme umgewandelt und kann nur als solche sich weiter übertragen und auf die andere Seite übergehen. Wenn das die Wandung bildende Metall ein vollkommen leitender, mit Widerstand nicht behafteter Körper wäre, so würde auch dies nicht stattfinden; die elektromagnetische Energie würde in das Innere des Leiters überhaupt nicht eindringen können. Wenn die Thatsache, welche die bemerkenswerten Forschungen von Dewar und Fleming voraussetzen lassen, und zwar, dass der spezifische Widerstand der Metalle bei der Temperatur

des absoluten Nullpunktes gleich Null wird, wahr wäre, so würde man sagen können, dass eine metallische Umkleidung bei dem absoluten Nullpunkte der Temperatur einen vollkommenen Schirm für die elektromagnetische Energie bildet, durch Wirkung derselben nicht erwärmt werden kann und ständig auf der Temperatur Null bleibt.

Man muss also den Schluss ziehen, dass von den beiden Hypothesen, dass die elektromagnetische Energie durch das Metall, oder ausserhalb des Metalles durch das Dielektrikum wandert, nur die zweite annehmbar ist. Die Erwärmung der Drähte, die die Erzeuger- mit der Empfänger-Station verbinden, schwächt die Annehmbarkeit dieser Hypothesen nicht; auch bei den Triebwerken der Mechanik erwärmen sich nicht die übertragenden Glieder, sondern die Lager, die Führungen etc.

Wir haben uns hauptsächlich auf Wechselströme bezogen, welche sich für die Betrachtungen über die Energieübertragung besser eignen, weil bei den Wechselströmen die Änderungen der Zustände des elektrischen Mediums beobachtet werden können, während diese Zustände bei den Gleichströmen unverändert erhalten bleiben.

Bei den Wechselströmen bestätigt uns eine lange Reihe von Beobachtungen und Erscheinungen immer deutlicher die Annahme, dass das Dielektrikum der Sitz und das Übertragungsmedium der Energie ist.

So stellt sich uns die Erscheinung des Skin-Effektes, durch welchen ein Strom mit grosser Frequenz sich an der Leiteroberfläche lokalisiert und auf den ganzen Querschnitt nicht gleichförmig verteilt, nach den angestellten Betrachtungen als eine sehr plausible Folgerung unserer Anschauung dar. Wir haben gesehen, dass die Energie grösstenteils parallel zu dem Leiter wandert, und nur ein wenig derselben von aussen nach dem Innern des Leiters konvergiert und sich in Wärme umwandelt. Wenn nun der Strom rasch veränderlich ist, so hat die Energie gewissermassen nicht die Zeit, sehr tief in den Leiter hinein einzudringen, und es ist natürlich, dass ihre Wirkungen sich auf die Leiteroberfläche beschränken.

Die Erscheinung kann übrigens mit derjenigen der Wärmeübertragung verglichen werden. Die Temperaturveränderungen z. B., die auf der Erdoberfläche stattfinden, pflanzen sich nur bis zu einer geringen Tiefe fort.

Der Vergleich, den man früher gewöhnlich zwischen einem elektrischen Strome und einer Flüssigkeitsströmung in einem Rohre anstellte, passt nur insofern, als man es in beiden Fällen mit einer Energieübertragung zu thun hat, welche durch eine Verschiebung, im ersten Falle elektrischer, im zweiten Falle materieller Massen stattfindet. Ganz anders ist aber der eigentliche Vorgang der Übertragung der Energie in beiden Fällen.

In der That wandert die Energie bei der Strömung einer Flüssigkeit im Innern des Rohres als lebendige Kraft, von den materiellen Massen

mitgenommen, und wird nur teilweise auf die Rohrwände übertragen und durch die daselbst stattfindende Reibung vergeudet, indem sie sich in Wärme umsetzt; bei einem elektrischen Strome wandert dagegen die Energie ausserhalb des Leiters und wird nur teilweise auf denselben übertragen und in Wärme durch den Joule'schen Effekt umgesetzt. Während die Geschwindigkeit der Flüssigkeit am grössten in der Rohrachse ist, ist dagegen die Stromdichte am grössten an der Leiteroberfläche.

144. Allgemeine Betrachtungen über die obigen Theorien. — Alle die oben besprochenen Theorien und Betrachtungen führen uns zu der Annahme, dass die Schwingungen sowohl die des Lichtes wie die thermischen und die elektromagnetischen sich im Äther fortpflanzen; und wenn einst, wie schon Lamé vorhersagte, auch die Kräfte in den elastischen Körpern mittels des Äthers erklärt werden, so wird man dann allgemein sagen müssen, dass das Medium, durch welches sich die Energie in einer beliebigen Form fortpflanzt, immer ein und dasselbe ist, nämlich der den ganzen Raum erfüllende Äther. Es giebt nur einen Träger der Energie, obwohl ein Unterschied besteht in der Art und Weise, wie die Fortpflanzung stattfindet, je nach den verschiedenen Erzeugungsarten der Energie. Die Maxwell'sche Theorie und die Hertz'schen Versuche haben es beispielsweise unzweifelhaft erscheinen lassen, dass das Medium, welches die Energie von der Welle einer Turbine zu derjenigen eines entfernten Motors oder von dem Kessel einer Dampfmaschine zu den Kohlenspitzen, zwischen welchen sich der Volta'sche Lichtbogen bildet, oder zu den leuchtenden Kohlenfäden der Glühlampen überträgt, dasselbe ist, durch welches und mittels dessen die gesamte Energie, über die wir auf der Erde verfügen, von der Sonne zu uns kommt oder gekommen ist.

Wechselströme, Hertz'sche Schwingungen, thermische und Licht-Schwingungen sind im wesentlichen nur verschiedene Formen einer und derselben Erscheinung: die Verschiedenheiten liegen nur in den Parametern, d. h. in den numerischen Grössen und zwar hauptsächlich in der Grösse der Frequenz.

Dass die Kenntnis des Wertes der Frequenz allein schon genügt, die grossen Verschiedenheiten bei den erwähnten Erscheinungen zu erklären, versteht man leicht, wenn man bedenkt, welchen grossen Einfluss dieser Wert auf die durch elektrische Mittel direkt erzeugten Schwingungen hat. In der That werden die industriellen Wechselströme, deren Frequenz zwischen 20 und 100 Perioden in der Sekunde variiert, wie die Gleichströme übertragen; der ganze Querschnitt des Leiters wird ausgenutzt, aber dem Ohm'schen Widerstand fügt sich der induktive Widerstand hinzu, dessen Wert mit der Frequenz zunimmt. Bei höheren Frequenzen

des ab
sagen
punkte
netisch
kann
M
dass d
des Me
ist. D
Station
auch
tragene
W
sich
weil b
Medium
Gleich
B
tunge
Diele
S
ein S
und a
geste
scha
zu
dem
nun
niel
natü
verg
ober
Stro
nur
zu th
im zv
eigent
I

Theorien ansieht, so besitzen sie ebenfalls den Charakter provisorischer Modelle, deren Aufgabe ähnlich derjenigen der Gerüste ist, die bei den Hochbauten verwendet werden, und zwar während des Baues notwendig sind, aber nach dessen Fertigstellung niedergerissen werden müssen, um die Ansicht des Baues nicht zu beeinträchtigen. Die Gleichungen von Maxwell und Hertz fassen jenen Teil unserer Kenntnisse über das elektromagnetische Medium zusammen, welcher bei dem heutigen Stande der Wissenschaft sich in bestimmte Form bringen lässt; sie fassen zusammen, was man thatsächlich durch die Erfahrung über die mechanischen Eigenschaften des Mediums kennt. Die Kenntnis jener Gleichungen berechtigt uns zu der Behauptung, dass wir den Äther kennen, ebenso gut, wie wir behaupten können, die Eigenschaften der elastischen Körper zu kennen, weil wir die Gleichungen besitzen, welche die Gleichgewichts- und die Bewegungsgesetze derartiger Körper ausdrücken. Eine mechanische Theorie des Äthers kann berechtigt sein, wenn sie mit jenen Gleichungen übereinstimmt, sie kann aber denselben nichts hinzufügen, oder wenn sie es thut, so fügt sie zu viel hinzu. Die Gleichungen von Maxwell und Hertz bilden für sich eine mechanische Theorie, eine umfassende Theorie ohne nähere Bezeichnung des Mechanismus; eine sogenannte mechanische Deutung dieser Theorie thut nichts anderes, als den Mechanismus zu spezifizieren, und es besteht mehr Wahrscheinlichkeit, sich dadurch von der Wirklichkeit zu entfernen, als sich derselben zu nähern. Eine Theorie ist um so wahrscheinlicher, je abstrakter sie ist. Wenn dieselbe ihren Ausdruck in Gleichungen finden kann, welche den durch die Erfahrung direkt angegebenen Thatsachen entsprechen, so besitzt sie alles, was man heute wünschen kann. Der Fortschritt besteht darin, dass die Gleichungen später eine grössere Zahl von experimentellen Thatsachen umfassen.

Anhang.

Allgemeine Bemerkungen über die elektrischen und magnetischen Masseinheiten.

1. Grund- und abgeleitete Einheiten. Absolutes C.-G.-S.-Masssystem. — Die Zahl, welche das *Mass* einer Grösse angiebt, drückt das Verhältnis zwischen dieser und einer anderen zur Vergleichung gewählten und *Masseinheit* genannten Grösse derselben Art aus. Um die Messung einer Grösse auszuführen, muss man zuerst die Masseinheit für die Grössen jener bestimmten Art gewählt haben.

Man kann als Einheit ganz willkürlich eine beliebige unter den Grössen jener Gattung annehmen; die so gewählten Einheiten nennt man *empirische Einheiten.*

Ein empirisches Normalmass soll dauerhaft sein, d. h. es soll sich weder mit der Zeit, noch durch Übertragung von einem nach einem anderen Orte verändern, derart, dass alle mit dieser Einheit an verschiedenen Orten und zu verschiedenen Zeiten vorgenommenen Messungen unter einander vergleichbar sind; es soll ferner leicht von neuem hergestellt werden können.

Man kann auch eine Masseinheit durch die mathematischen Beziehungen definieren, die zwischen jener und anderen schon voraus bestimmten Einheiten von verschiedener Natur bestehen. Die so definierte Masseinheit heisst *abgeleitet,* und in bezug auf diese werden die anderen *Grundeinheiten* genannt.

Bei der Festsetzung der Masseinheiten für ein gegebenes Grössensystem wird man eine gewisse Zahl von empirischen Grundeinheiten frei wählen können und daraus alle anderen herleiten. Wegen der Schwierigkeit, die empirischen Normalmasse derart zu bestimmen, dass sie die erforderten Bedingungen in bezug auf Dauerhaftigkeit erfüllen, ist ein Masssystem um so besser, je kleiner die Zahl der empirischen Einheiten ist; die kleinste Zahl letzterer hängt von der Natur der zu messenden Grössen ab. In den Aufgaben der Geometrie beispielsweise betrachtet man nur *den Begriff Raum,* und es genügt hierbei als empirische Einheit die

Längeneinheit; in der Kinematik führt man einen neuen Grundbegriff, den Begriff *Zeit*, ein, und es wird eine willkürlich gewählte Zeiteinheit nötig; in der Mechanik, bei deren Studium man auf den neuen Begriff der Masse kommt, muss eine dritte willkürliche Einheit, die *Masseneinheit* definiert werden.

Ein lediglich auf den drei empirischen Einheiten der Länge, Zeit und Masse beruhendes Masssystem heisst *absolutes Masssystem.* Gauss führte als Erster den Begriff von absoluten Messungen in die Wissenschaft ein und wandte dieselben in dem Gebiete des Magnetismus an, und Kirchhoff zeigte die Möglichkeit, die elektrischen Messungen auf absolute Systeme zu reduzieren; Wilhelm Weber aber gebührt das Verdienst, diese Masssysteme in einen geordneten Zusammenhang gebracht zu haben.

Bezeichnen wir allgemein mit L, M und T die empirischen Grundeinheiten der Länge, Masse und Zeit, so können wir immer eine abgeleitete Einheit, abgesehen von konstanten Faktoren, in die Form:

$$L^\alpha M^\beta T^\gamma$$

bringen, wobei die Exponenten α, β und γ beliebige positive oder negative, ganze oder gebrochene Werte besitzen und auch teilweise gleich Null sein können. Durch einen solchen symbolischen Ausdruck lässt sich das Gesetz darstellen, nach welchem die abgeleitete Einheit mit dem Variieren der Grundeinheiten variiert; es werden dadurch, wie man sagt, die physikalischen Dimensionen oder kurzweg die *Dimensionen* der abgeleiteten Einheit angegeben.

Ist A der Wert der abgeleiteten Einheit in dem auf den empirischen Einheiten L, M und T beruhenden Systeme, und wählt man als neue empirische Einheiten L', M' und T', so nimmt die abgeleitete Einheit einen neuen Wert:

$$A' = A\left(\frac{L'}{L}\right)^\alpha \left(\frac{M'}{M}\right)^\beta \left(\frac{T'}{T}\right)^\gamma$$

an.

Wenn n die Zahl bedeutet, welche das Mass einer Grösse in der Einheit A ausdrückt, so wird dieselbe Grösse in der Einheit A' von der Zahl n' angegeben, die der Beziehung:

$$nA = n'A', \text{ d. h. } \frac{n'}{n} = \frac{A}{A'}$$

genügt.

Das Verhältnis der numerischen Werte einer und derselben, aber in zwei verschiedenen Einheiten ausgedrückten Grösse ist gleich dem reziproken Werte des Quotienten der betreffenden Einheiten.

Die „British Association for Advancement of Sciences" wählte als

Grundeinheiten der Länge, Masse und Zeit, bezw. das *Centimeter*, das *Gramm* und die *Sekunde;* diese Einheiten wurden definitiv und offiziell von dem internationalen, in Paris im Jahre 1881 abgehaltenen Kongresse der Elektrotechniker adoptiert, wobei auch das Übereinkommen getroffen wurde, die abgeleiteten Einheiten dieses Systemes einfach mit dem Symbol C. G. S. zu bezeichnen, ohne denselben besondere Benennungen zu erteilen; man machte nur eine Ausnahme für die Einheiten der Kraft und der Arbeit, welche bezw. *Dyn* und *Erg* genannt wurden.

Ein Masssystem, welches auf den Grundeinheiten Centimeter, Gramm und Sekunde beruht, heisst *absolutes C. G. S.-System.*

2. Geometrische, kinematische und mechanische Grössen. — Es ist zweckmässig, hier die Dimensionen und die C. G. S.-Einheiten der wichtigsten in der Geometrie, in der Kinematik und in der Mechanik vorkommenden Grössen vorauszuschicken.

Grössen	Dimensionen	C. G. S.-Einheiten
Geometrie:		
Winkel	abs. Zahl $= L^0$	—
Länge	L^1	cm.
Fläche	L^2	cm.^{2}
Volumen	L^3	cm.^{3}
Kinematik:		
Zeit	T	sek.
Geschwindigkeit	$L T^{-1}$	$\frac{\text{cm.}}{\text{sek.}}$
Beschleunigung	$L T^{-2}$	$\frac{\text{cm.}}{\text{sek.}^2}$
Mechanik:		
Masse	M	gr.
Kraft	$L M T^{-2}$	$\frac{\text{cm. gr.}}{\text{sek.}^2}$
Arbeit, Energie, Lebendige Kraft	$L^2 M T^{-2}$	$\frac{\text{cm.}^2 \text{ gr.}}{\text{sek.}^2}$
Effekt, Leistung	$L^2 M T^{-3}$	$\frac{\text{cm.}^2 \text{ gr.}}{\text{sek.}^3}$

Für den praktischen Gebrauch ergeben sich die C. G. S.-Einheiten von Leistung und Arbeit zu klein; deshalb wurde bestimmt, das C. G. S.-*System* als Grundlage beizubehalten, aber die Einheiten der beiden ge-

nannten Grössen mit einer passenden Potenz von 10 zu multiplizieren, und man adoptierte:

$$\text{als Arbeitseinheit das } \textit{Joule} = 10^7 \text{ erg},$$

$$\text{als Leistungseinheit das } \textit{Watt} = 10^7 \frac{\text{erg}}{\text{sek.}}.$$

Dies sind die hauptsächlich von den Elektrotechnikern gebrauchten Einheiten: die Maschineningenieure dagegen verwenden zumeist noch als Einheit für die Kraft, die Arbeit und die Leistung bezw. das Kilogramm, das Kilogrammmeter und die Pferdekraft oder horse-power.*)

Bedeutet g die Beschleunigung der Schwerkraft, so sind die Verhältnisse zwischen diesen verschiedenen Einheiten:

$$\text{kg} \ldots\ldots\ldots = 10^5\, g \text{ dyn}$$

$$\text{kgm} \ldots\ldots\ldots = 10^7\, g \text{ erg} \ldots\ldots\ldots = g \text{ Joule}$$

$$\text{PS} \ldots\ldots\ldots = 10^7.75\, g \frac{\text{erg}}{\text{sek.}} \ldots\ldots = 736 \text{ Watt}$$

$$\text{HP} \ldots\ldots\ldots = 550 \text{ foot-pound} \ldots = 746 \text{ Watt}$$

$$\text{Joule} \ldots\ldots\ldots = 10^7 \text{ erg} \ldots\ldots\ldots = \frac{1}{g} \text{ kgm.}$$

$$\text{Watt} \ldots\ldots\ldots = 10^7 \frac{\text{erg}}{\text{sek.}} \ldots\ldots\ldots = \frac{1}{736} \text{ P.S.}$$

$$\text{Kilowatt} \ldots\ldots = 10^{10} \frac{\text{erg}}{\text{sek.}} \ldots\ldots\ldots = 1{,}36 \text{ P.S.}$$

3. Magnetische Grössen. — Wir wissen nicht, welches eigentlich die physikalischen Dimensionen der magnetischen Grössen sind, und wir können es auch nicht wissen, weil es dafür zuerst notwendig wäre, das Wesen und die physikalische Natur des Magnetismus selbst zu kennen. Wählt man aber die Dimensionen einer dieser Grössen ganz willkürlich, dann sind die Dimensionen aller anderen vollständig bestimmt, und man kann auf diese Basis das Masssystem gründen. Die magnetischen Grössen können also auf unendlich viele Weisen auf ein absolutes Mass reduziert werden, und es ist selbstverständlich, dass man unter allen jenes System gewählt hat, welches die grösste Vereinfachung in den Formeln und Rechnungen mit sich bringt. Bei der Behandlung der magnetischen Felder ist die Coulomb'sche Formel für das Gesetz der zwischen zwei gleichen *magnetischen* Massen bei verschiedenen Abständen vorhandenen Abstossungskraft grundlegend, da deren Konstante k in fast allen zwischen magnetischen Grössen bestehenden Beziehungen erscheint. Man ist daher

*) Der Pariser Kongress der Maschineningenieure nahm als Leistungseinheit das *Poncelet* an, welches gleich 100 kgm. pro Sekunde ist.

überein gekommen, diese Grösse als einfache, dimensionslose Zahl zu betrachten.

Wir haben gesehen [62], wie man, von dieser Grundannahme ausgehend, durch das Gauss'sche Verfahren aus der Coulomb'schen Formel die Einheit für die magnetische Masse und mithin ihre Dimensionen ableiten kann. Die Dimensionen aller anderen magnetischen Grössen gehen alsdann aus den zwischen denselben bestehenden Beziehungen direkt hervor.

Dimensionen der magnetischen Grössen.

Faktor k der Coulomb'schen Formel (für magnetische Massen)	Zahl
Magnetische Masse	$L^{\frac{3}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1}$
Magnetische Feldstärke	$L^{-\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1}$
Magnetischer Kraftfluss	$L^{\frac{3}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1}$
Magnetisches Potential	$L^{\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1}$
Dichte des Magnetismus	$L^{-\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1}$
Magnetisches Moment	$L^{\frac{5}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1}$
Intensität der Magnetisierung	$L^{-\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1}$
Magnetische Kraft	$L^{-\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1}$
Magnetische Induktion	$L^{-\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1}$
Magnetische Suszeptibilität	Zahl
Magnetische Permeabilität	Zahl
Magnetische Verschiebung	$L^{-\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1}$
Spezifischer magnetischer Widerstand	Zahl
Magnetischer Widerstand	L^{-1}
Potenz eines magnetischen Blattes	$L^{\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1}$

4. **Elektrische Grössen.** — Die physikalischen Dimensionen der elektrischen Grössen sind, wie diejenigen der magnetischen Grössen, von vornherein nicht bekannt, man kann aber durch die willkürliche Wahl irgend einer derselben beliebig viele absolute Masssysteme aufstellen. Die Wahl

wird natürlich auch hier auf dasjenige System fallen, welches die grösste Vereinfachung in den Formeln und Berechnungen mit sich bringt.

In einem sich im Gleichgewichte befindenden elektrischen Felde ist, ebenso wie in einem magnetischen Felde, die Coulomb'sche Formel von grossem Belang, und es ist daher vorteilhaft, die Konstante k als eine einfache absolute Zahl zu betrachten. Es handelt sich hierbei natürlich um die Coulomb'sche Formel für das Gesetz der zwischen zwei gleichen *Elektrizitäts*mengen bei verschiedenen Abständen vorhandenen Abstossungskraft [30]. Bei der Behandlung der dynamisch-elektrischen Erscheinungen, die ihre Entstehung den in elektrischen oder magnetischen Feldern auftretenden Veränderungen verdanken, ist dagegen die Vereinfachung, die man dadurch erlangt, dass man k als eine absolute Zahl annimmt, eine sehr kleine, und es ist vorzuziehen, als dimensionslos den Faktor h der Formel $\mathfrak{P} = hi$ (2) [94], welcher fast bei allen elektromagnetischen Erscheinungen eine Rolle spielt, anzunehmen.

Es ist daher zweckmässig, zwei Masssysteme für die elektrischen Grössen aufzustellen: das *elektrostatische System*, welches von der Hypothese ausgeht, dass der Faktor k der Coulomb'schen Formel für Elektrizitätsmengen eine einfache Zahl sei, und das *elektromagnetische System*, welches als einfache Zahl den Faktor h der Formel $\mathfrak{P} = hi$ annimmt.

In dem ersten System wird die Grösse einer Elektrizitätsmenge am einfachsten durch die Kräfte definiert, welche zwischen Elektrizitätsmengen wirken, die sich im Gleichgewichte befinden; in dem zweiten definiert man auf die einfachste Weise die Grösse der Stärke eines elektrischen Stromes durch seine elektromagnetischen Wirkungen. Die Wahl zweier Masssysteme entspricht der Thatsache, dass die Grössenordnung der verschiedenen Grössen eine andere ist, je nachdem man die Elektrizität im Gleichgewichtszustande oder im Bewegungszustande betrachtet.

Dimensionen der elektrischen Grössen.

Grössen	Elektrostatisches Masssystem	Elektromagnetisches Masssystem
Faktor k der Coulomb'schen Formel (für Elektrizitätsmengen)	Zahl	$L^2 T^{-2}$
Elektrizitätsmenge	$L^{\frac{3}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1}$	$L^{\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}}$
Elektrische Flächendichte.	$L^{-\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1}$	$L^{-\frac{3}{2}} M^{\frac{1}{2}}$
Elektrische Feldstärke	$L^{-\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1}$	$L^{\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-2}$

Grössen	Elektrostatisches Masssystem	Elektromagnetisc Masssystem
Elektrischer Kraftfluss	$L^{\frac{3}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1}$	$L^{\frac{5}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-2}$
Elektrisches Potential	$L^{\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1}$	$L^{\frac{3}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-2}$
Elektrische Verschiebung	$L^{-\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1}$	$L^{-\frac{3}{2}} M^{\frac{1}{2}}$
Elektrostatische Kapazität	L	$L^{-1} T^2$
Dielektrizitätskonstante	Zahl	$L^{-2} T^{-1}$
Elektromotorische Kraft	$L^{\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1}$	$L^{\frac{3}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-2}$
Stromstärke	$L^{\frac{3}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-2}$	$L^{\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1}$
Elektrischer Widerstand	$L^{-1} T$	$L T^{-1}$
Spezifischer elektrischer Widerstand	T	$L^2 T^{-1}$
Elektrische Leitfähigkeit	$L T^{-1}$	$L^{-1} T$
Spezifische Elektrische Leitfähigkeit	T^{-1}	$L^{-2} T$
Faktor h der Formel $\mathfrak{P} = hi$	$L^{-1} T$	Zahl
Koeffizient der gegenseitigen Induktion Koeffizient der Selbstinduktion	$L^{-1} T^2$	L
Impedanz Reaktanz	$L^{-1} T$	$L T^{-1}$

5. Beziehung zwischen den Einheiten der beiden Systeme. — Das gleichzeitige Vorhandensein zweier Masssysteme bringt praktisch keine Schwierigkeit mit sich, weil man stets, wenn die Beziehungen zwischen den Dimensionen der Einheiten einer gewissen Grösse in den beiden Systemen bekannt sind, von dem einen zu dem anderen übergehen kann.

Bezeichnet c das Verhältnis zwischen der elektromagnetischen und der elektrostatischen C. G. S.-Einheit der Elektrizitätsmenge, so kann man die Dimension einer jeden beliebigen dem einen System angehörigen Einheit aus der entsprechenden Einheit des anderen Systems ohne weiteres *durch einfache* Multiplikation mit einer Potenz von c ableiten.

Verhältnisgrössen zwischen den elektromagnetischen und elektrostatischen C. G. S.-Einheiten der wichtigsten elektrischen Grössen.

Elektrizitätsmenge	v
Stromstärke	v
Elektrischer Kraftfluss	$\frac{1}{v} = v^{-1}$
Potential	$\frac{1}{v} = v^{-1}$
Elektromotorische Kraft	$\frac{1}{v} = v^{-1}$
Kapazität	v^2
Widerstand	$\frac{1}{v^2} = v^{-2}$
Koeffizient der gegenseitigen Induktion	$\frac{1}{v^2} = v^{-2}$
Koeffizient der Selbstinduktion	$\frac{1}{v^2} = v^{-2}$

Zwischen den in den verschiedenen Systemen ausgedrückten Werten er und derselben Grösse bestehen wechselseitige Beziehungen. Durch rgleichung der Dimensionen einer und derselben Grösse in beiden stemen ermittelt man die Dimension von v, welche sich als diejenige er Geschwindigkeit darstellt.

Das Mittel aus den experimentell gefundenen Werten von v stimmt t dem Mittel der von den verschiedenen Forschern berechneten Werte r Lichtgeschwindigkeit überein:

$$v = 3 . 10^{10} \text{ cm. in der Sek.}$$

Maxwell gab eine bemerkenswerte physikalische Deutung dieses erhältnisses v als einer Geschwindigkeitsgrösse, indem er die Wirkungen trachtete, die zwischen gleichnamigen elektrischen Massen ausgeübt erden, wenn sich die Körper, in welchen die elektrischen Massen vorndeu sind, auf parallelen Bahnen bewegen, unter der Voraussetzung, ss zu der elektrostatischen Wirkung sich eine elektrodynamische addiert, elche der zwischen zwei Strombahnen bestehenden Wirkung analog ist.*) enn die gleichnamigen elektrischen Massen gleichförmig auf zwei rallele Ebenen verteilt sind, welche sich mit der Geschwindigkeit v begen, so sind die beiden entgegengesetzten Wirkungen, die elektrotische und die elektrodynamische, einander gleich und heben sich gegenitig auf.

Die elektromagnetische Lichttheorie und die Hertz'schen Versuche ben nachher in glänzender Weise bewiesen, dass v die Fortpflanzungs-

*) Diese sinnreiche Ableitung wurde durch die Versuche von Rowland bettigt, welcher mit Hilfe einer in sehr schnelle Rotation versetzten dielektrischen heibe die Wirkung eines Konvektionsstromes auf die Magnetnadel nachwies.

Geschwindigkeit der elektromagnetischen, der Wärme- und der Lichtstrahlen in einem Medium ist, in welchem die Dielektrizitätskonstante und die magnetische Permeabilität gleich *Eins* sind.

6. Praktisches Masssystem. — Für die industrielle Praxis sind die Einheiten des elektromagnetischen C. G. S.-Systemes entweder zu gross oder zu klein, sodass die in der Praxis am häufigsten vorkommenden Grössen durch sehr grosse oder durch sehr kleine Zahlen ausgedrückt werden müssten. Das praktische System beruht daher zwar auf dem absoluten elektromagnetischen C. G. S.-System, aber die verschiedenen Einheiten des ersteren Systems sind aus den entsprechenden Einheiten des letzteren durch eine Multiplikation mit einer passenden Potenz von 10 hergeleitet und dadurch auf eine den hauptsächlich vorkommenden Werten nahe liegende Grösse reguliert, so ergeben sich unmittelbar die Koeffizienten für zwei Einheiten bestimmt, nennungen dieser praktischen Einheiten wurden die Namen von hervorragenden Elektrikern gewählt, zum Teil in abgekürzter Form.

Die praktischen Einheiten der wichtigsten elektrischen Grössen sind:

für die Widerstände . . . . . das *Ohm* $= 10^9$ cm. / sek.

„ elektromotorischen Kräfte und Potentialdifferenzen . . „ *Volt* $= 10^8 \frac{\text{cm.}^{\frac{3}{2}} \text{ gr.}^{\frac{1}{2}}}{\text{sek.}^2}$

„ Stromstärken . . . . . „ *Ampère* $= \frac{Volt}{Ohm} = \ldots = 10^{-1} \frac{\text{cm.}^{\frac{1}{2}} \text{ gr.}^{\frac{1}{2}}}{\text{sek.}}$

„ Elektrizitätsmengen . . . . . „ *Coulomb* $= Ampère.\text{sek.} = 10^{-1} \text{ cm.}^{\frac{1}{2}} \text{ gr.}^{\frac{1}{2}}$

„ elektrostatischen Kapazitäten . „ *Farad* $= \frac{Coulomb}{Volt} = 10^{-9} \frac{\text{sek.}^2}{\text{cm.}}$

Koeffizienten der gegenseitigen Induktion und der Selbstin- „ *Henry* $= \frac{Volt.\text{sek.}}{Ampère} = \text{sek. } Ohm$

. . . . . $= 10^9$ cm. $=$ Erdquadrant. $= Sekohm$

prakt

heit der Induktanz *Quadrant* oder *Sekohm* genannt worden. Der Pariser Kongress 1881 adoptierte ferner offiziell für die Vielfachen der praktischen Einheiten dieselben Bezeichnungen, wie sie in dem Metersystem gebräuchlich sind, und fügte die Vorsilben *Mega* und *Mikro* hinzu, durch welche das 10^6-fache bezw. das 10^{-6}-fache der betreffenden Grösse bezeichnet werden soll.

Das praktische System, welches aus dem elektromagnetischen C. G. S.-System abgeleitet worden ist, kann seinerseits als ein absolutes elektromagnetisches System angesehen werden, welches als Grundeinheiten:

$$L = 10^9 \text{ cm.} = \text{Quadrant}$$
$$M = 10^{-11} \text{ gr.}$$
$$T = \text{sek.}$$

hat.

Das *Joule* und das *Watt* sind die Einheiten der Arbeit bezw. der Leistung in diesem System, sie können aber, wie wir gesehen haben, unabhängig von jeder Betrachtung elektrischer Vorgänge durch die C. G. S.-Einheiten und passende Koeffizienten definiert werden.

7. Absolute und relative Messungen. Normalien der praktischen Einheiten. — Bei der Messung einer Grösse in einem absoluten Masssystem kann man auf zwei verschiedene Weisen vorgehen:

1. Man kann den Wert der Grösse lediglich durch geometrische und mechanische Messungen d. h. lediglich unter Benutzung der Normalmasse von Länge, Masse und Zeit bestimmen. Eine solche Bestimmung heisst dann *absolut.*

2. Man kann zuerst ein Vergleichsmass, welches die Einheit für die Grössen jener Art angiebt, sich herstellen, und dann den Wert der zu messenden Grösse durch Vergleichung derselben mit jenem Masse bestimmen. Eine solche Messung heisst *relativ.*

Bei der Bestimmung der Werte von elektrischen Grössen kann man zwar absolute Messungen vornehmen, aber wegen der damit verknüpften Schwierigkeiten begnügt man sich in der Praxis mit relativen Messungen; hierfür war es nun nicht genügend, die abstrakten Definitionen der verschiedenen Einheiten gegeben zu haben, sondern man bedurfte der Festsetzung von Normalien, welche die Einheiten mit einer für den praktischen Gebrauch hinreichenden Genauigkeit darstellen.

7. Als Einheit für die elektrische Leistung: das *Watt*, gleich der 10^7fachen Grösse der entsprechenden absoluten C. G. S.-Einheit.

8. Als Einheit für die Induktanz: das *Henry*. Dasselbe ist gleich der Induktanz eines Stromkreises, in welchem die E. M. K. eines *internationalen Volt* induziert wird, wenn die Änderung der Stromstärke in der Sekunde ein *internationales Ampère* beträgt.

Verlagsbuchhandlung B. G. TEUBNER in Leipzig.

Vorlesungen
über
Technische Mechanik
in vier Bänden
von
Dr. August Föppl,

Professor der Mechanik u. Vorstand des Mechan.-Techn. Laboratoriums a. d. Techn. Hochschule in München.

Band: Einführung in die Mechanik (1. Aufl. 1898). 2. Aufl. 1900. Preis geb. *M.* 10.—
Band: Graphische Statik. Preis geb. *M.* 10.—
Band: Festigkeitslehre (1. Aufl. 1897). 2. Aufl. 1900. Preis geb. *M.* 12.—
Band: Dynamik. (1. Aufl. 1899). 2. Aufl. 1901. Preis geb. *M.* 12.—

Preis des ganzen Werkes in vier eleganten Leinwd.-Bänden *M.* 44.—

Der Geheimrat Professor **Lampe** von der Technischen Hochschule in Berlin schreibt:
„Wie bei der Anzeige des zuerst erschienenen dritten Bandes bemerkt wurde, ist die Föpplsche Darstellung der Mechanik dadurch ausgezeichnet, dafs die Darstellung von grofser Einfachheit und Klarheit das Hauptgewicht in die Begriffsbildung gelegt wird; durch Vermeidung verwickelter analytischer Entwickelungen wird der Raum gewonnen zur eingehenden Erörterung und Vertiefung der Grundanschauungen auf mechanischer Basis. Diese Eigenschaften fallen natürlich bei dem vorliegenden ersten Bande am meisten in die Augen. . . . .“
„Als eigenartiges Erzeugnis eines selbständig schaffenden Geistes verdient das Buch, welches auch grofse Verbreitung in technischen Kreisen gewifs einen bedeutenden Einfluſs ausüben wird, auch von wissenschaftlicher Seite volle Beachtung und genaue Prüfung der Einzelheiten.“

Zeitschrift des **Österr. Ingenieur- und Architekten-Vereines:**
„Bei der allgemein bekannten Bedeutung, die der Verfasser auf dem Gebiete der Festigkeitsuntersuchungen besitzt, und bei den zahlreichen Erfahrungen, die er als Leiter einer der bedeutendsten Unternehmungen gewonnen hat, ist gerade die Bearbeitung der Festigkeitslehre von seiner Seite für die Ingenieurschaft von höchstem Interesse. Wenn auch Föppls Werk sich zunächst an seine Studierenden wendet, so ist es dennoch auch von gröfstem Nutzen für den in der Praxis stehenden Ingenieur. Allerdings setzt es einige Kenntnisse in der Differentialrechnung noch voraus, aber nur in bescheidenem Umfange, sodafs man voraussetzen kann, dafs jeder Ingenieur aus seiner Hochschulzeit her noch so viel behalten hat. Übrigens hat der Verfasser durch die vollständig durchgeführten Übungsbeispiele in den Aufgaben auch dem in der Differentialrechnung Ungeübten die Benutzung seines Buches wesentlich erleichtert, man braucht wirklich nur noch mit den Grundbegriffen hinlänglich genügend vertraut zu sein, um nach diesen Mustern weiterarbeiten zu können.“

Die Ingenieur-Mathematik
in elementarer Behandlung.
Von
Prof. Dr. Gustav Holzmüller,

Direktor der Kgl. Maschinenbauschule zu Hagen i. W., Mitglied der Leopoldinisch-Karolinischen Akademie.

Erster Teil: enthaltend die statischen Momente und Schwerpunktslagen, die Trägheits- und Centrifugalmomente für die wichtigsten Querschnittsformen und Körper der technischen Mechanik in rechnender und graphischer Behandlung unter Berücksichtigung der Methoden von Nehls, Mohr, Culmann, Land und Anderer. Mit 287 Fig. und zahlr. Übungsaufgaben. [XI u. 340 S.] gr. 8. 1897. In Leinw. geb. n. *M.* 5.—

Zweiter Teil: enthaltend das Potential und seine Anwendung auf die Theorieen der Gravitation, des Magnetismus, der Elektrizität, der Wärme und der Hydrodynamik. Mit 237 Figuren, zahlr. Übungsbeispielen und einem Anhange über Mafseinheiten. [XVII u. 440 S.] gr. 8. 1898. In Leinw. geb. n. *M.* 6.—

Die **„Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure“** schreibt:
„In allen Abschnitten bilden nicht die mathematischen Formeln die Hauptsache, sondern die zahlreichen Anwendungen auf mechanische Aufgaben. Überall wird gezeigt, wie mit sehr wenigen mathematischen Sätzen eine Unmenge mechanischer Aufgaben gelöst werden kann; zur Erhöhung des Interesses sind stets überaus anregende Betrachtungen über weitere Anwendbarkeit der entwickelten Verfahren angeknüpft. — Jede Aufgabe ist elegant gelöst, der eingeschlagene Weg oft geradezu verblüffend, sodafs ein Studium nicht nur den Lehrern an technischen Unterrichtsanstalten sowie den Mathematikern an allgemein bildenden Schulen, sondern gerade solchen Ingenieuren, die noch keine Gelegenheit hatten, elementare Verfahren kennen zu lernen, aufs wärmste zu empfehlen ist.“

Kataloge gratis und franko!

Verlag von B. G. Teubner in Leipzig.

Lehrbuch der Experimentalphysik

von

Dr. Adolph Wüllner,

Professor der Physik an der Königl. Technischen Hochschule zu Aachen.

Fünfte, vielfach umgearbeitete und verbesserte Auflage.

4 Bände. gr. 8. geh. ℳ 56.—, in Hfzbd. ℳ 64.—

I. Band. **Allgemeine Physik und Akustik.** Mit 321 in den Text gedruckten Holzschnitten. [X u. 1000 S.] 1895. ℳ 12.—, in Hfzbd. ℳ 14.—

II. — **Die Lehre von der Wärme.** Mit 131 in den Text gedruckten Abbildungen und Figuren. [XI u. 936 S.] 1896. ℳ 12.—, in Hfzbd. ℳ 14.—

III. — **Die Lehre vom Magnetismus und von der Elektricität** mit einer Einleitung: Grundzüge der Lehre vom Potential. Mit 341 in den Text gedruckten Abbildungen und Figuren. [XV u. 1415 S.] 1897. ℳ 18.—, in Hfzbd. ℳ 20.—

IV. — **Die Lehre von der Strahlung.** Mit 299 in den Text gedruckten Abbildungen u. Figuren u. 4 lithogr. Tafeln. [XII u. 1012 S.] 1899. ℳ 14.—, in Hfzbd. ℳ 16.—

Die wissenschaftlichen Vorzüge dieses reich ausgestatteten Lehrbuchs sind von der Kritik einstimmig anerkannt worden. Dasselbe hat sich die Aufgabe gestellt, einerseits die physikalischen Lehren in weiteren Kreisen bekannt zu machen, andrerseits denjenigen, welche tiefer in das Gebiet des physikalischen Wissens eindringen wollen, als Vorschule zu dienen; es hat aber, ohne den ersten Zweck aufser Acht zu lassen, die zweite, wissenschaftliche Aufgabe mehr ins Auge gefafst, als dies von den verbreitetsten Lehrbüchern der Physik bis jetzt geschehen ist.

Die vorliegende 5. Auflage der Experimentalphysik hat die gleiche Haltung wie die früheren Auflagen; das Buch soll unter dem steten Hinweise auf die Originalarbeiten eine Übersicht geben über den augenblicklichen Stand der experimentellen Physik und über die theoretischen Auffassungen, zu denen die Physik zur Zeit gelangt ist.

Der Schwerpunkt des Werkes liegt hiernach in den Experimentaluntersuchungen, und deshalb sind alle wichtigeren neueren Untersuchungen, die bis zur Bearbeitung des betreffenden Bandes erschienen waren, aufgenommen; wo es wünschenswert erschien, wurde auch auf ältere Arbeiten zurückgegriffen. Die Erweiterung des experimentellen Materials verlangte auch ein tieferes Eingehen in die Theorieen; dieselben sind so weit dargelegt, wie es ohne zu ausgedehnte Rechnungen möglich war. Das neu zu behandelnde Material war ein recht ausgedehntes, daher auch der ziemlich erheblich gewachsene Umfang des Buches.

Repertorium der höheren Mathematik

(Definitionen, Formeln, Theoreme, Litteraturnachweise)

von

Ernesto Pascal,

ord. Prof. an der Universität zu Pavia

Autorisierte deutsche Ausgabe von A. Schepp in Wiesbaden.

In 2 Teilen. I. Teil: **Die Analysis.** gr. 8. Biegsam in Leinw. geb. ℳ 10.—

Der Zweck des Buches ist, auf einem möglichst kleinen Raum die wichtigsten Theorieen der neueren Mathematik zu vereinigen, von jeder Theorie nur so viel zu bringen, dafs der Leser imstande ist, sich in ihr zu orientieren, und auf die Bücher zu verweisen, in welchen er Ausführlicheres finden kann.

Für den Studierenden der Mathematik soll es ein „Vademecum" sein, in welchem er kurz zusammengefafst, alle mathematischen Begriffe und Resultate findet, die er während seiner Studien sich angeeignet hat oder noch aneignen will.

Die Anordnung der verschiedenen Teile ist bei jeder Theorie fast immer dieselbe: zuerst werden die Definitionen und Grundbegriffe der Theorie gegeben, alsdann die Theoreme und Formeln (ohne Beweis) aufgestellt, welche die Verbindung zwischen den durch die vorhergehenden Definitionen eingeführten Dingen oder Gröfsen bilden, und schliefslich ein kurzer Hinweis auf die Litteratur über die betreffende Theorie gebracht.

P. P. 1173

Meinen umfangreichen Verlag auf dem Gebiete der **Mathematischen**, der **Technischen** und **Naturwissenschaften** nach allen Richtungen hin weiter auszubauen, ist mein stetes durch das Vertrauen und Wohlwollen zahlreicher hervorragender Vertreter obiger Gebiete von Erfolg begleitetes Bemühen, wie mein Verlagskatalog zeigt, und ich hoffe, dafs bei gleicher Unterstützung seitens der Gelehrten und Schulmänner des In- und Auslandes auch meine weiteren Unternehmungen Lehrenden und Lernenden in Wissenschaft und Schule jederzeit förderlich sein werden. **Verlagsanerbieten** gediegener Arbeiten auf einschlägigem Gebiete werden mir deshalb, wenn auch schon gleiche oder ähnliche Werke über denselben Gegenstand in meinem Verlage erschienen sind, stets sehr willkommen sein.

Unter meinen zahlreichen Unternehmungen mache ich ganz besonders auf die von den Akademien der Wissenschaften zu München und Wien und der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen herausgegebene **Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften** aufmerksam, die in 7 Bänden die Arithmetik und Algebra, die Analysis, die Geometrie, die Mechanik, die Physik, die Geodäsie und Geophysik und die Astronomie behandelt und in einem Schlufsband historische, philosophische und didaktische Fragen besprechen, sowie ein Generalregister zu obigen Bänden bringen wird.

Weitester Verbreitung erfreuen sich die mathematischen und naturwissenschaftlichen Zeitschriften meines Verlags, als da sind: Die **Mathematischen Annalen**, die **Bibliotheca Mathematica**, das **Archiv der Mathematik und Physik**, die **Jahresberichte der Deutschen Mathematiker-Vereinigung**, die **Zeitschrift für Mathematik und Physik** und die **Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht.**

Seit 1868 veröffentliche ich in kurzen Zwischenräumen: **„Mitteilungen der Verlagsbuchhandlung B. G. Teubner“.** Diese „Mitteilungen“, welche unentgeltlich in 20000 Exemplaren sowohl im In- als auch im Auslande von mir verbreitet werden, sollen das Publikum, welches meinem Verlage Aufmerksamkeit schenkt, von den erschienenen, unter der Presse befindlichen und von den vorbereiteten Unternehmungen des Teubnerschen Verlags in Kenntnis setzen und sind ebenso wie das bis auf die Jüngstzeit fortgeführte jährlich zwei- bis dreimal neu gedruckte **Verzeichnis des Verlags von B. G. Teubner auf dem Gebiete der Mathematik, der technischen und Naturwissenschaften nebst Grenzgebieten**, 96. Ausgabe [XL u. 168 S. gr. 8], in allen Buchhandlungen unentgeltlich zu haben, werden auf Wunsch aber auch unter Kreuzband von mir unmittelbar an die Besteller übersandt.

Leipzig, Poststrafse 3. **B. G. Teubner.**

FEB 15 1939